

10. Forum Matematyków Polskich

Wydział Matematyki
Uniwersytet w Białymstoku

8-12 września 2025

Copyright © 2025 Polskie Towarzystwo Matematyczne

Opracowano w systemie $\text{\LaTeX}$

Składu dokonano 11 września 2025

Zezwala się na wykonywanie i rozpowszechnianie kopii niniejszej publikacji pod warunkiem zachowania powyższej informacji o właścicielu praw autorskich na wszystkich kopiach.

Skład i opracowanie techniczne: Mariusz Żynel (mariusz@math.uwb.edu.pl)

Forum	1
Uczestnicy	9
Wykłady	19
Referaty	39
Prelegenci	139
Spis treści	147

Forum

Anons

Forum Matematyków Polskich jest wydarzeniem cyklicznym, organizowanym przez Polskie Towarzystwo Matematyczne we współpracy ze szkołami wyższymi działającymi w ośrodku akademickim wybranym na miejsce obrad. Będąc jednym z najważniejszych wydarzeń w kalendarzu polskiej społeczności matematycznej, Forum

- przyciąga wybitnych naukowców oraz młodych adeptów matematyki pracujących zarówno na terenie Polski jak i poza jej granicami,
- jest miejscem, w którym dyskusja o najnowszych trendach i kierunkach rozwoju współczesnej matematyki przeplata się z refleksją nad jej historią,
- wzbudza zainteresowanie nauczycieli matematyki,
- wzmacnia współpracę pomiędzy osobami z różnych środowisk zainteresowanych podniesieniem poziomu edukacji matematycznej w Polsce,
- w ramach imprez popularyzujących matematykę, promuje nauki ścisłe wśród dzieci i młodzieży,
- sprzyja integracji środowiska matematyków polskich i jest okazją do dyskusji o problemach nurtujących to środowisko.

10. Forum Matematyków Polskich będzie miało miejsce w dniach od 8 do 12 września 2025 roku w Białymstoku. W ramach Forum planowane jest

- wręczenie Nagród Głównych PTM:
 - [im. Stefana Banacha](#) za osiągnięcia w dziedzinie badań matematycznych,
 - [im. Samuela Dicksteina](#) za osiągnięcia w dziedzinie edukacji matematycznej, popularyzacji i historii matematyki,
 - [im. Hugona Steinhausa](#) za osiągnięcia w dziedzinie zastosowań matematyki,
 - [nagrody dla młodych matematyków](#) za osiągnięcia badawcze,
- wręczenie [Nagrody im. Kazimierza Kuratowskiego](#) za osiągnięcia naukowe w zakresie matematyki,

- wręczenie [Międzynarodowej Nagrody im. Stefana Banacha](#) za wybitną pracę doktorską w dziedzinie nauk matematycznych,
- wykłady laureatów,
- wykłady plenarne zaproszonych prelegentów,
- wystąpienia uczestników w ramach sesji tematycznych,
- uroczyste nadanie tytułu honorowego członka PTM dr. hab. Edwardowi Tutajowi,
- dyskusja na temat nauczania matematyki w Polsce.

Równocześnie z 10. FMP w Białymstoku będzie miała miejsce dwudziesta pierwsza edycja [Ogólnopolskiej Konferencji Nauczania Matematyki w Uczelniach Technicznych](#).

Historia

Polskie Towarzystwo Matematyczne wywodzi się z Towarzystwa Matematycznego w Krakowie, założonego 2 kwietnia 1919 roku. Statut Towarzystwa określał jego cel jako wszechstronne pielęgnowanie matematyki czystej i stosowanej poprzez odbywanie posiedzeń naukowych z odczytami, wydawanie czasopism periodycznych i prac o treści matematycznej oraz utrzymywanie łączności z matematycznym ruchem naukowym za granicą, podniesienie poziomu edukacji matematycznej w szkołach średnich między innymi poprzez wpływanie na dobór podręczników szkolnych. Do wybuchu II Wojny Światowej odbyły się trzy Zjazdy Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Pierwszy Polski Zjazd Matematyczny odbył się w dniach 7-10 września 1927 roku we Lwowie, został zorganizowany przez Oddział Lwowski PTM, przewodniczył mu Wacław Sierpiński. Celem Zjazdu było zaznajomienie jak najszerszego ogółu matematyków polskich z najnowszymi odkryciami w matematyce oraz bezpośrednie spotkanie matematyków z różnych ośrodków w Polsce. W uchwale końcowej uczestnicy Zjazdu zaapelowali między innymi o gruntowną reformę programu nauczania matematyki w szkołach średnich.

Drugi Polski Zjazd Matematyczny odbył się w dniach 23-26 września 1931 roku w Wilnie, został zorganizowany przez Oddział Wileński PTM, przewodniczył mu Wiktor Staniewicz. Jedną z uchwał przyjętych przez Zjazd dotyczyła przygotowania nauczycieli matematyki szkół średnich. Uczestnicy Zjazdu uznali

za požądane by do wymagań egzaminacyjnych dla kandydatów na nauczycieli matematyki szkół średnich została włączona matematyka wyższa wraz z zarysem historii matematyki.

Trzeci Polski Zjazd Matematyczny obradował w Warszawie w dniach od 28 września do 3 października 1937 roku. Celem Zjazdu był przegląd dorobku matematycznego w Polsce po sześciu latach, jakie upłynęły od poprzedniego Zjazdu oraz nawiązanie ściślejszego kontaktu osobistego pomiędzy matematykami.

Od 2006 roku w miejsce Zjazdów Polskiego Towarzystwa Matematycznego organizowane są Fora Matematyków Polskich, adresowane do całego środowiska matematyków polskich.

Dotychczasowe Fora:

- 9. FMP, Katowice, 9-13 września, 2024,
- 8. FMP, Lublin, 18-22 września, 2017,
- 7. FMP, Olsztyn, 12-17 września, 2016,
- 6. FMP, Warszawa, 7-12 września, 2015,
- 5. FMP, Rzeszów, 16-20 września, 2013,
- 4. FMP, Olsztyn, 1-3 lipca, 2010,
- 3. FMP, Kraków, 30 czerwca - 2 lipca, 2009,
- 2. FMP, Częstochowa, 1-4 lipca, 2008,
- 1. FMP, Gdańsk, 4-8 września, 2006.

Laureaci

- | | |
|---|--|
| • Juliusz BANECKI
Uniwersytet Jagielloński | • Borys KUČA
Uniwersytet Jagielloński |
| • Urszula FORYŚ
Uniwersytet Warszawski | • Maciej KUCHARSKI
Uniwersytet Wrocławski |
| • Damian GŁODKOWSKI
Uniwersytet Warszawski | • Barbara ROSZKOWSKA-ŁECH
Politechnika Warszawska |
| • Agnieszka HEJNA-ŁYŻWA
Uniwersytet Wrocławski | • Jakub SKRZECZKOWSKI
University of Oxford |

Wykładowcy plenarni

- Agnieszka BODZENTA-SKIBIŃSKA
Uniwersytet Warszawski
- Artem DUDKO
Polska Akademia Nauk
- Piotr DYSZEWSKI
Uniwersytet Wrocławski
- Andrzej INDRZEJCZAK
Uniwersytet Łódzki
- Jacek JENDREJ
Sorbonne Université
Akademia Górniczo-Hutnicza
- Lech MALIGRANDA
Politechnika Poznańska
- Ryszard MAZUREK
Politechnika Białostocka
- Andrzej SITARZ
Uniwersytet Jagielloński
- Karol ŻYCZKOWSKI
Uniwersytet Jagielloński

Komitety

Komitety naukowy

Przewodniczący

- Tomasz BRZEZIŃSKI
Uniwersytet w Białymstoku
Swansea University

Członkowie

- Radosław ADAMCZAK
Uniwersytet Warszawski, ZG PTM
- Zbigniew BARTOSIEWICZ
Politechnika Białostocka
- Leokadia BIAŁAS-CIEŻ
Uniwersytet Jagielloński, ZG PTM
- Krzysztof DĘBICKI
Uniwersytet Wrocławski
- Stefan JACKOWSKI
Uniwersytet Warszawski
- Wiesław KUBIŚ
Uniwersytet Kardynała Stefana
Wyszyńskiego
- Mariusz LEMAŃCZYK
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

- | | |
|---|--|
| • Wacław MARZANTOWICZ
Uniwersytet im. Adama Mickiewicza | • Agnieszka TERESZKIEWICZ
Politechnika Białostocka |
| • Piotr SOŁTAN
Uniwersytet Warszawski | • Agnieszka WYŁOMAŃSKA
Politechnika Wrocławska |
| • Jacek TABOR
Uniwersytet Jagielloński | • Ewelina ZATORSKA
University of Warwick |

Komitet organizacyjny

Przewodnicząca

- **Małgorzata HRYNIEWICKA**
Uniwersytet w Białymstoku

Przedstawiciele Zarządu Głównego PTM

- | | |
|---|--|
| • Leokadia BIAŁAS-CIEŻ
Uniwersytet Jagielloński | • Alina GLESKA
Politechnika Poznańska |
| • Maciej CZARNECKI
Uniwersytet Łódzki | • Piotr KOWALCZYK
Uniwersytet Warszawski |

Przedstawiciele Białostockiego Oddziału PTM

- | | |
|--|--|
| • Marzena FILIPOWICZ-CHOMKO
Politechnika Białostocka | • Anna POSKROBKO
Politechnika Białostocka |
| • Małgorzata JASTRZĘBSKA
Uniwersytet w Siedlcach | • Anna RYBAK
Uniwersytet w Białymstoku |
| • Justyna MAKOWSKA
Uniwersytet w Białymstoku | • Aneta SŁIŻEWSKA
Uniwersytet w Białymstoku |
| • Hanna MĄKA
Centrum Edukacji Nauczycieli
w Białymstoku | • Agnieszka STOCKA
Uniwersytet w Białymstoku |
| • Dorota MOZYSKA
Politechnika Białostocka | • Mariusz ŻYNEL
Uniwersytet w Białymstoku |

Uczestnicy

A

Romuald Ryszard ANDRUSZKIEWICZ

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: r.andruszkiewicz@uwb.edu.pl

B

Michał BACZYŃSKI

Uniwersytet Śląski

e-mail: michal.baczynski@us.edu.pl

Czesław BAGIŃSKI

Politechnika Białostocka

e-mail: c.baginski@pb.edu.pl

Juliusz BANECKI

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: juliusz.banecki@student.uj.edu.pl

Krzysztof BARDADYN

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: kbardadyn@math.uwb.edu.pl

Zbigniew BARTOSIEWICZ

Politechnika Białostocka

e-mail: z.bartosiewicz@pb.edu.pl

Agata BEZUBIK

II Liceum Ogólnokształcące w Białymstoku

e-mail: bezubik.agata@gmail.com

Marcin BILSKI

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: marcin.bilski@im.uj.edu.pl

Agnieszka BODZENTA-SKIBIŃSKA

Uniwersytet Warszawski

e-mail: a.bodzenta@mimuw.edu.pl

Oleg BOGOPOLSKIY

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: oleg.bogopolskiy@usz.edu.pl

Agnieszka BOJANOWSKA

e-mail: aboj@mimuw.edu.pl

Urszula BRACHACZEK-STEKLA

I LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie

e-mail:

urszula.brachaczek@chrobry.edukacja-pszczyna.pl

Tomasz BRZEZIŃSKI

Uniwersytet w Białymstoku

Swansea University

e-mail: t.brzezinski@uwb.edu.pl

Maria BULIŃSKA

Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

e-mail: bulma@uwm.edu.pl

C

Paweł CHŁOSTA

Akademia Humanistyczno-Ekonomiczna w Łodzi

e-mail: pchlosta@ahelodz.pl

Jan Leszek CIEŚLIŃSKI

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: j.cieslinski@uwb.edu.pl

Wojciech CYGAN

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: wojciech.cygan@uwr.edu.pl

Maciej CZARNECKI

Uniwersytet Łódzki

e-mail: maciej.czarnecki@wmii.uni.lodz.pl

Tomasz CZYŻYCKI

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: tomczyk@math.uwb.edu.pl

D

Alina DOBROGOWSKA

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: alina.dobrogowska@uwb.edu.pl

Tomasz DOWNAROWICZ

Politechnika Wrocławska

e-mail: downar@pwr.edu.pl

Tomasz DRWIĘGA

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: drwiega@agh.edu.pl

Artem DUDKO

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: adudko@impan.pl

Aurelia DYMEK

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

e-mail: aurbart@mat.umk.pl

Piotr DYSZEWSKI

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: piotr.dyszewski@math.uni.wroc.pl

E

Armen EDIGARIAN

Uniwersytet Jagielloński w Krakowie

e-mail: armen.edigarian@uj.edu.pl

F

Iwona FILIPIUK

I LO im. Bolesława Chrobrego w Pszczynie

e-mail: iwona@chrobry.edukacja-pszczyna.pl

Marzena FILIPOWICZ-CHOMKO

Politechnika Białostocka

e-mail: m.filipowicz@pb.edu.pl

Urszula FORYŚ

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urszula@mimuw.edu.pl

G

Ewa GIREJKO

Politechnika Białostocka

e-mail: e.girejko@pb.edu.pl

Alina GLESKA

Politechnika Poznańska

e-mail: alina.gleska@put.poznan.pl

Damian GŁODKOWSKI

Uniwersytet Warszawski

e-mail: d.glodkowski@uw.edu.pl

Maciej GNATOWSKI

Politechnika Białostocka

e-mail: 77932@student.pb.edu.pl

Tomasz GOLIŃSKI

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: tomaszg@math.uwb.edu.pl

Katarzyna GRABOWSKA

Uniwersytet Warszawski

e-mail: konieczn@fuw.edu.pl

Janusz GRABOWSKI

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: jagrab@impan.pl

Janusz GWOŹDZIEWICZ

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: gwozd63@gmail.com

H

Agnieszka HEJNA-ŁYŻWA

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: agnieszka.hejna@math.uni.wroc.pl

Waldemar HOŁUBOWSKI

Politechnika Śląska

e-mail: w.holubowski@polsl.pl

Grażyna HORBACZEWSKA

Uniwersytet Łódzki

e-mail: grazyna.horbaczewska@wmii.uni.lodz.pl

Małgorzata HRYNIEWICKA

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: margitt@math.uwb.edu.pl

I

Andrzej INDRZEJCZAK

Uniwersytet Łódzki

e-mail: andrzej.indrzejczak@uni.lodz.pl

J

Stefan JACKOWSKI

Uniwersytet Warszawski

e-mail: stefan.jackowski@uw.edu.pl

Grzegorz JAKIMOWICZ

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: g.jakimowicz@uwb.edu.pl

Bronisław JAKUBCZYK

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: b.jakubczyk@impan.pl

Małgorzata JASTRZĘBSKA

Uniwersytet w Siedlcach

e-mail: malgorzata.jastrzebska@uws.edu.pl

Maciej JAWORSKI

Politechnika Krakowska

e-mail: maciej.jaworski@pk.edu.pl

Jacek JENDREJ

Sorbonne Université

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: jendrej@imj-prg.fr

Tomasz JĘDRZEJAK

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: tjedrzejak@gmail.com

Michał JÓŻWIKOWSKI

Uniwersytet Warszawski

e-mail: m.jozwikowski@mimuw.edu.pl

K

Andrzej KAŁUŻA

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: akaluza@agh.edu.pl

Piotr KIELANOWSKI

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: Piotr.Kielanowski@fuw.edu.pl

Helena KIEREPKA

OpenX Poland

e-mail: helena.kierepka@openx.com

Jerzy Juliusz KIJOWSKI

Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

e-mail: kijowski@cft.edu.pl

Marta KORNAFEL

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

e-mail: marta.kornafel@uek.krakow.pl

Jan KOROŃSKI

Politechnika Krakowska

e-mail: jan.koronski@pk.edu.pl

Krzysztof KOWITZ

Uniwersytet Gdański

e-mail: Krzysztof.Kowitz@ug.edu.pl

Jacek KRAJCZOK

Vrije Universiteit Brussel

e-mail: jacek.krajczok@vub.be

Tadeusz KRASIŃSKI

Uniwersytet Łódzki

e-mail: tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

Wiesław KUBIŚ

Instytut Matematyki WMP
Uniwersytet Kardynała Stefana Wyszyńskiego
w Warszawie
e-mail: kubis@math.cas.cz

Borys KUČA

Uniwersytet Jagielloński
e-mail: borys.kuca@uj.edu.pl

Maciej KUCHARSKI

Uniwersytet Wrocławski
e-mail: maciej.kucharski@math.uni.wroc.pl

Wojciech KUCHARZ

Uniwersytet Jagielloński
e-mail: Wojciech.Kucharz@im.uj.edu.pl

Krzysztof KURDYKA

Université Savoie Mont Blanc
e-mail: kurdyka@univ-smb.fr

Bartosz KWAŚNIEWSKI

Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: b.kwasniewski@uwb.edu.pl

Radosław Antoni KYCIA

Politechnika Krakowska
e-mail: kycia.radoslaw@gmail.com

L

Irena LASIECKA

University of Memphis
e-mail: lasiecka@memphis.edu

Andrzej LENARCIK

Politechnika Świętokrzyska
e-mail: andrzej.lenarcik@gmail.com

Anna LORANTY

Uniwersytet Łódzki
e-mail: anna.loranty@wmii.uni.lodz.pl

Ł

Andrzej ŁUCZAK

Uniwersytet Łódzki
e-mail: andrzej.luczak@wmii.uni.lodz.pl

Grzegorz ŁYSIK

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach
e-mail: glysik@ujk.edu.pl

M

Justyna MAKOWSKA

Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: j.makowska@uwb.edu.pl

Lech MALIGRANDA

Politechnika Poznańska
e-mail: lech.maligranda@gmail.com

Izabela Agata MALINOWSKA

Uniwersytet w Białymstoku
e-mail: i.malinowska@uwb.edu.pl

Wacław MARZANTOWICZ

Uniwersytet Adama Mickiewicza
Polskie Towarzystwo Matematyczne
e-mail: marzan@amu.edu.pl

Ryszard MAZUREK

Politechnika Białostocka
e-mail: r.mazurek@pb.edu.pl

Hanna MAKA

VIII LO w Białymstoku
CEN w Białymstoku
e-mail: hanna.maka@op.pl

Ilona MICHALIK

Akademia Górniczo-Hutnicza
e-mail: ilonam@agh.edu.pl

Adam MICHAŁOWSKI
 Uniwersytet w Białymstoku
 e-mail: adam.michalowski2501@gmail.com

Jacek MIĘKISZ
 Uniwersytet Warszawski
 e-mail: miekisz@mimuw.edu.pl

Wojciech Tadeusz MŁOTKOWSKI
 Uniwersytet Wrocławski
 e-mail: wojciech.mlotkowski@math.uni.wroc.pl

Piotr MORMUL
 Uniwersytet Warszawski
 e-mail: mormul@mimuw.edu.pl

Dorota MOZYRSKA
 Politechnika Białostocka
 e-mail: d.mozyrska@pb.edu.pl

N

Agnieszka NIEMCZYNOWICZ
 Politechnika Krakowska
 e-mail: a.niemczynowicz@pk.edu.pl

Krzysztof Jan NOWAK
 Uniwersytet Jagielloński
 e-mail: nowak@im.uj.edu.pl

Marcin NOWICKI
 Politechnika Poznańska
 e-mail: marcin.nowicki@put.poznan.pl

P

Bronisław Jerzy PABICH
 XX LO w Krakowie
 PCKiU w Wieliczce
 e-mail: bronek.pabich@gmail.com

Beata PARCIAK
 e-mail: beataparcia@wp.pl

Dariusz PARTYKA
 Katolicki Uniwersytet Lubelski
 Państwowa Akademia Nauk Stosowanych w Chełmie
 e-mail: dariusz.partyka@kul.pl

Ewa PAWŁOWSKA
 Szkoła Podstawowa nr 4 w Białymstoku
 e-mail: ewapska@gmail.com

Wiesław PAWŁUCKI
 Uniwersytet Jagielloński
 e-mail: Wieslaw.Pawlucki@im.uj.edu.pl

Paweł PEREKIETKA
 Zakłady Kórnickie
 e-mail: pawel.perekietka@gmail.com

Joanna PERKOWSKA
 e-mail: jperkowska01@wp.pl

Krzysztof PETELCZYC
 Uniwersytet w Białymstoku
 e-mail: kryzpet@math.uwb.edu.pl

Piotr PISKORSKI
 Zespół Przedmiotowy ds. Matematyki IBE
 Zespół Szkół STO na Bemowie
 e-mail: piotr.piskorski@stonabemowie.edu.pl

Anna POSKROBKO
 Politechnika Białostocka
 e-mail: a.poskrobko@pb.edu.pl

Karol PRYSZCZEPKO
 Uniwersytet w Białymstoku
 e-mail: k.pryszczepko@uwb.edu.pl

R

Krzysztof RADZISZEWSKI
 Uniwersytet w Białymstoku
 e-mail: k.radziszewski@uwb.edu.pl

Piotr REMZA
 Uniwersytet w Białymstoku
 e-mail: p.remza@uwb.edu.pl

Witold RESPONDEK

Politechnika Łódzka

e-mail: witold.respondek@insa-rouen.fr

Ewa ROSZKOWSKA

Politechnika Białostocka

e-mail: e.roszkowska@pb.edu.pl

Barbara ROSZKOWSKA-LECH

Politechnika Warszawska

e-mail: barbara.lech@pw.edu.pl

Adam RÓŻYCKI

Uniwersytet Łódzki

e-mail: adam.rozyczki@wmii.uni.lodz.pl

Anna RYBAK

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: a.rybak@uwb.edu.pl

Piotr RYSIŃSKI

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: piotr.rysinski@gmail.com

Daniel Ryś

e-mail: danrys@op.pl

S

Andrzej SITARZ

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: andrzej.sitarz@uj.edu.pl

Grigorij SKLYAR

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny
w Szczecinie

e-mail: gsklyar@zut.edu.pl

Jakub SKRZECZKOWSKI

University of Oxford

e-mail: jakub.skrzeczkowski@maths.ox.ac.uk

Urszula SKWARA

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urszulaskwara@mimuw.edu.pl

Aneta SŁIŻEWSKA

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: anetasl@uwb.edu.pl

Mateusz SŁOMIANY

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: mateusz.slomiany@phd.usz.edu.pl

Roksana SŁOWIK

Politechnika Śląska

e-mail: roksana.slowik@polsl.pl

Zbigniew SMOLEŃSKI

Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro

e-mail: grzegorz.szeliga@pazdro.com.pl

Magdalena SOBOLEWSKA

VIII Liceum Ogólnokształcące w Białymstoku

e-mail: sobolewska.magdalena@gmail.com

Piotr Mikołaj SOŁTAN

Uniwersytet Warszawski

e-mail: piotr.soltan@fuw.edu.pl

Rajmund STASIEWICZ

Politechnika Białostocka

e-mail: r.stasiewicz@pb.edu.pl

Marcin STĘPIEŃ

Politechnika Świętokrzyska

e-mail: mstepien@tu.kielce.pl

Agnieszka STOCKA

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: stocka@math.uwb.edu.pl

Michał STRZELECKI

Uniwersytet Warszawski

e-mail: michalst@mimuw.edu.pl

Marzena SZAJEWSKA

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: m.szajewska@math.uwb.edu.pl

Tomasz SZWED

Akademia Nauk Stosowanych w Raciborzu

e-mail: szwedphd@gmail.com

Anna SZYDŁOWSKA

Casio

e-mail: a.szydowska@keepcalmpr.pl

Agnieszka SZYMAŃSKA

Szkoła Podstawowa w Zawadach

e-mail: szymaga@onet.eu

Anna SZYMCZYNA

Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

e-mail: aszymczyna@student.agh.edu.pl

Sylwia SZYMSKA

Szkoła Podstawowa nr 38 w Białymstoku

e-mail: sylwia.czapkowska@gmail.com

T

Małgorzata TEREPEŁA

Politechnika Łódzka

e-mail: malgorzata.terepeta@p.lodz.pl

Edward TUTAJ

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: Edward.Tutaj@im.uj.edu.pl

U

Paweł URBAŃSKI

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urbanski@fuw.edu.pl

W

Mateusz WASILEWSKI

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: mwasilewski@impan.pl

Tomasz Szymon WAWRZYCKI

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: tomasz.wawrzycki@student.uj.edu.pl

Anna Dorota WICIŃSKA

e-mail: anna.wicinska@gmail.com

Jerzy Jacek WOJTKIEWICZ

Uniwersytet Warszawski

e-mail: wjacek@fuw.edu.pl

Mateusz WORONOWICZ

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: m.woronowicz@uwb.edu.pl

Wiesław WÓJCIK

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie

e-mail: w.wojcik@ujd.edu.pl

Małgorzata WYRWAS

Politechnika Białostocka

e-mail: m.wyrwas@pb.edu.pl

Anna WYSOCZAŃSKA-KULA

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: anna.kula@math.uni.wroc.pl

Z

Kamil ZABIELSKI

Politechnika Białostocka

e-mail: kamil.zabielski@pb.edu.pl

Karolina Wiktoria ZAJĄC

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: karolina.w.zajac@doctoral.uj.edu.pl

Ewa ZANIEWSKA

e-mail: zaniewa0@wp.pl

Ewa ZDRODOWSKA

e-mail: zewik@vp.pl

| Ż

Karol ŻYCKOWSKI

Uniwersytet Jagielloński

Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

e-mail: karol.zyczkowski@uj.edu.pl

Mariusz ŻYNEL

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: mariusz@math.uwb.edu.pl

Wykłady

Wykłady laureatów

Realizacja klas homotopii przez rzeczywiste morfizmy algebraiczne

Juliusz Banecki

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: juliusz.banecki@student.uj.edu.pl

W referacie opowiem o problemie klasyfikacji klas homotopii realizowanych przez rzeczywiste odwzorowania regularne. Przybliżę wyniki różnych autorów, skupiając się głównie na najnowszych ideach z ostatnich kilku lat. Szczególną uwagę poświęcę przypadkowi sfer.

MSC (2020): 14P25

Literatura

- [1] J. Banecki, *Algebraic homotopy classes*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2024, 187, 45–57.
- [2] J. Banecki, *Homotopy properties of regular mappings into real retract rational varieties*, ArXiv:2505.11203.

Matematyka w służbie medycyny: perspektywa onkologii matematycznej

Urszula Forys

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urszula@mimuw.edu.pl

Każda terapia opisana jest liczbami. Przepisując konkretny lek lekarz musi wiedzieć, jaką dawkę podać pacjentowi, ile razy dziennie pacjent ma ją przyjmować, przez ile dni. Przy chemioterapii onkolog decyduje ile cykli należy zastosować oraz iludniowe powinny być odstępy między cyklami. Jeśli stosowane są terapie łączone, to istotne jest, którą terapię zastosować jako pierwszą, a którą jako drugą (jak np. w przypadku połączenia chemioterapii z terapią antyangiogenną).

Pojawia się więc pytanie, skąd lekarz bierze te wszystkie liczby? W przypadku standardowych terapii czy leków używanych od lat odpowiedź wydaje się oczywista — to wiadomo, lekarz pewnie powie, że „z praktyki”. Przy nowych terapiach medycy często bazują na swoim doświadczeniu i intuicji.

W trakcie mojego wykładu postaram się wykazać, że liczby, o których mowa, mają często swoje uzasadnienie matematyczne, a jeśli nie mają, to matematyka może pomóc je przeanalizować pod kątem skuteczności leczenia, a nawet zaproponować rozwiązania optymalne, por. najnowsze prace mojego współautorstwa [1] – [8].

MSC (2020): 92C50

Literatura

- [1] Z. Agur, M. Elishmereni, U. Foryś, Y. Kogan, *Accelerating the development of personalized cancer immunotherapy by integrating molecular patients' profiles with dynamic mathematical models*, Clinical Pharmacology & Therapeutics, 2020, 108(3), 515–527.
- [2] P. Bajger, M. Bodzioch, U. Foryś, *Numerical optimisation of chemotherapy dosage under antiangiogenic treatment in the presence of drug resistance*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(18), 10671–10689.
- [3] M. Bodnar, U. Foryś, M.J. Piotrowska, M. Bodzioch, J.A. Romero-Rosales, J. Belmonte-Beitia, *On the analysis of a mathematical model of CAR-T cell therapy for glioblastoma: Insights from a mathematical model*, International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2023, 33(3), 379–394.
- [4] M. Bodnar, M.J. Piotrowska, M. Bodzioch, J. Belmonte-Beitia, U. Foryś, *Dual CAR-T cell therapy for glioblastoma: strategies to cure tumour diseases based on a mathematical model*, Nonlinear Dynamics, 2025, 113(2), 1637–1666.
- [5] M. Bodzioch, P. Bajger, U. Foryś, *Angiogenesis and chemotherapy resistance: Optimizing chemotherapy scheduling using mathematical modeling*, Journal of Cancer Research and Clinical Oncology, 2021, 147(8), 2281–2299.
- [6] M. Bodzioch, J. Belmonte-Beitia, U. Foryś *Asymptotic dynamics and optimal treatment for a model of tumour resistance to chemotherapy*, Applied Mathematical Modelling, 2024, 135, 620–639.
- [7] U. Foryś, A. Nahshony, M. Elishmereni, *Mathematical model of hormone sensitive prostate cancer treatment using leuprolide: A small step towards personalization*, Plos one, 2022, 17(2), e0263648.

- [8] M. Szafrńska-Łęczycka, Z. Szymańska, M.J. Piotrowska, M. Bodnar, U. Foryś, *CAR-T cell therapy for glioblastoma: insight from mathematical modeling*, *Frontiers in Immunology*, 2025, 16, 1563829.

Przestrzeń Lipschitza w kontekście dunklowskim – podejście półgrupowe

Agnieszka Hejna-Łyżwa

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: agnieszka.hejna@math.uni.wroc.pl

Dla $0 < \beta < 1$, klasyczna niejednorodna przestrzeń Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$ jest zdefiniowana jako

$$\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_{L^\infty} + \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\beta} =: \|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\}.$$

W pracy Taiblesona [1] autor użył całki Poissona (półgrupy):

$$f(\mathbf{x}, t) = c_N^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{y}) \frac{t}{(t^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)^{(N+1)/2}} d\mathbf{y}$$

do badania własności przestrzeni Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$. Dokładniej, dla dowolnej ustalonej liczby całkowitej dodatniej m , norma $\|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)}$ jest równoważna

$$\|f\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} t^{m-\beta} \left\| \frac{d^m}{dt^m} f(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^\infty}.$$

Twierdzenie to prowadzi do rozszerzenia pojęcia przestrzeni Lipschitza na wszystkie dodatnie parametry $\beta > 0$.

Niech $\{P_t\}_{t>0}$ będzie półgrupą Dunkl–Poissona związaną z systemem pierwiastków $R \subset \mathbb{R}^N$ oraz funkcją krotności $k \geq 0$. Mówimy, że ograniczona funkcja mierzalna f określona na $\mathbb{R}^N$ należy do niejednorodnej przestrzeni Lipschitza Λ_k^β , $\beta > 0$, jeśli

$$\sup_{t>0} t^{m-\beta} \left\| \frac{d^m}{dt^m} P_t f \right\|_{L^\infty} < \infty,$$

gdzie $m = [\beta] + 1$.

Podczas mojego wystąpienia omówimy następujący wynik.

Twierdzenie. Dla dowolnego $\beta > 0$ przestrzeń Lipschitza Λ_k^β pokrywa się z klasyczną przestrzenią Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$, a odpowiadające im normy są równoważne.

Przedyskutujemy główne idee i intuicje. Przyjrzymy się również metodzie dowodu, która wykorzystuje inne charakteryzacje przestrzeni oraz stosuje metodę K -interpolacji. Metoda dowodu różni się od klasycznych metod używanych w tym kontekście.

Są to prace wspólne z prof. Jackiem Dziubańskim.

MSC (2020): 44A20, 42B20, 42B25, 47B38, 33C52, 39A70

Literatura

- [1] M.H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space I. Principal properties*, J. Math. Mech., 1964, 13, 407–479.

Metody ergodyczne w kombinatoryce addytywnej

Borys Kuca

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: borys.kuca@uj.edu.pl

Kombinatoryka addytywna bada konfiguracje arytmetyczne w dużych zbiorach liczb, podczas gdy teoria ergodyczna zajmuje się długoterminowym zachowaniem statystycznym układów dynamicznych. Choć na pierwszy rzut oka są to bardzo odmienne dziedziny, są one głęboko ze sobą powiązane. Ich owocna współpraca rozpoczęła się w 1977 roku, kiedy Furstenberg przedstawił ergodyczny dowód twierdzenia Szemerédiego z kombinatoryki addytywnej. Od tego czasu metody ergodyczne okazały się niezwykle skuteczne w rozwiązywaniu problemów z zakresu kombinatoryki i teorii liczb. W tym wystąpieniu pokażę, w jaki sposób techniki ergodyczne są wykorzystywane w kombinatoryce i jakie wyniki zostały za ich pomocą udowodnione.

MSC (2020): 37A44, 11B30

Niezależne od wymiaru oszacowania norm transformat Riesz

Maciej Kucharski

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: maciej.kucharski@math.uni.wroc.pl

Transformata Hilberta i jej wielowymiarowy odpowiednik – transformata Riesz – są podstawowymi obiektami badań analizy harmonicznej. Jako operatory Calderóna-Zygmunda są one ograniczone na przestrzeniach $L^p(\mathbb{R}^d)$ dla $p \in (1, \infty)$, ponadto, jak pokazał E. Stein, wektor transformat Riesz ma normę $L^p(\mathbb{R}^d)$ ograniczoną niezależnie od wymiaru przestrzeni d .

W swoim wystąpieniu wprowadzę transformaty Riesz oraz związane z nimi maksymalne transformaty Riesz i na przykładzie wspomnianego wyżej twierdzenia Steina pokażę, jak używa się metody obrotów, żeby uzyskiwać niezależne od wymiaru oszacowania norm operatorów.

MSC (2020): 42B20, 42B25

Literatura

- [1] J. Duoandikoetxea, J.L. Rubio de Francia, *Estimations indépendantes de la dimension pour les transformées de Riesz*, C. R. Acad. Sc. Paris, 1985, t. 300 Série I, no. 7, 193–196.
- [2] M. Kucharski, B. Wróbel, J. Zienkiewicz, *Dimension-free L^p estimates for higher order maximal Riesz transforms in terms of the Riesz transforms*, arXiv:2305.09279.

Złote Twierdzenie – prawo wzajemności reszt kwadrato- wych

Barbara Roszkowska-Lech

Politechnika Warszawska

e-mail: barbara.lech@pw.edu.pl

Ian Stewart w pięknej książce „Oswajanie nieskończoności” napisał „Często musi upłynąć pewien czas – bywa że setki lat – zanim dobre matematyczne idee nabiorą pożytecznego znaczenia” [2].

Przykładem ilustrującym tę tezę jest Prawo wzajemności reszt kwadratowych, jedno z podstawowych twierdzeń teorii liczb, które określa związek między rozwiązywalnością dwóch kongruencji kwadratowych modulo różne liczby pierwsze. Pierwszy dowód opublikował Karl Friedrich Gauss w 1801 roku w *Disquisitiones Arithmeticae*.

Gauss nazywał to twierdzenie Złotym (Theorem Aureum) i sam podał sześć dowodów, a do czasów współczesnych opublikowano ich ponad 250. Tak duża liczba różnych dowodów potwierdza fakt, że jest to „dobra matematyczna idea” mocno powiązana z innymi działami matematyki.

W czasie wykładu postaram się spopularyzować nową wersję pewnego starego dowodu oraz opowiem o współczesnych pożytecznych znaczeniach Prawa wzajemności reszt kwadratowych.

MSC (2020): 11A41, 11A15

Literatura

- [1] F. Lemmermeyer, *Reciprocity Laws: From Euler to Eisenstein*, Springer, 2000.
- [2] I. Stewart, *Oswajanie nieskończoności*, Prószyński i S-ka, 2009.

Metody równań cząstkowych w statystyce

Jakub Skrzeczkowski

University of Oxford

e-mail: jakub.skrzeczkowski@maths.ox.ac.uk

W ostatnich latach metody oparte na równaniach cząstkowych (PDE) odgrywają coraz większą rolę w nowoczesnej statystyce bayesowskiej i uczeniu maszynowym. W trakcie wykładu przedstawię podstawowe idee stojące za wykorzystaniem PDE do konstrukcji algorytmów próbkowania oraz aproksymacji rozkładów. Następnie opowiem o metodzie Stein Variational Gradient Descent (SVGD), jednej z najważniejszych technik łączących rachunek wariacyjny z teorią gradientowych przepływów w przestrzeni miar probabilistycznych. Omówię wyniki (wspólna praca z Jose Antonio Carrillo, Jethro Warnett) dotyczące konstrukcji specjalnych jąder, dla których (ciągła) metoda SVGD osiąga wykładniczy rząd zbieżności, co otwiera drogę do znacznie szybszych i bardziej efektywnych algorytmów.

MSC (2020): 35A15, 35B40

Wykłady plenarne

Nasycanie powierzchni algebraicznych

Agnieszka Bodzenta-Skibińska

Uniwersytet Warszawski

e-mail: a.bodzenta@mimuw.edu.pl

Mój wykład dotyczyć będzie powierzchni, przez które zazwyczaj rozumieć będę rozmaitości algebraiczne wymiaru dwa nad ciałem algebraicznie domkniętym. Zgodnie z definicją wprowadzoną w [1] powiem, że powierzchnia X jest *nasycona*, jeżeli nie można dodać do niej punktów. Innymi słowy, jeżeli $X \subset Y$ jest otwartym podzbiorem innej powierzchni i $Y \setminus X$ ma wymiar zero, to X jest izomorficzna z Y .

Uargumentuję, że dowolna powierzchnia X jest otwartym podzbiorem nasyconej powierzchni $\bar{X}$. Dla danej powierzchni X ten *nasycony model* $\bar{X}$ jest wyznaczony jednoznacznie. Jeżeli X jest gładka, to jej nasycony model $\bar{X}$ można odtworzyć z kategorii $\text{Bun}(X)$ wiązek wektorowych na X . W trakcie wykładu naszkicuję konstrukcję $\bar{X}$ z $\text{Bun}(X)$. Opierając się na pracach [1] i [3], opowiem również, jak należy zmodyfikować tę teorię dla powierzchni osobliwych oraz przy założeniu, że X jest dwuwymiarową przestrzenią algebraiczną.

Głównym narzędziem wykorzystywanym w konstrukcji $\bar{X}$ z $\text{Bun}(X)$ jest pojęcie otoczki abelowej kategorii dokładnej, wprowadzone w pracy [2], o którym również powiem kilka słów.

MSC (2020): 14E25, 14F06, 18B15

Literatura

- [1] A. Bodzenta, A. Bondal, *Reconstruction of a surface from the category of reflexive sheaves*, Adv. Math., 2023, 434.
- [2] A. Bodzenta, A. Bondal, *Abelian envelopes of exact categories and highest weight categories*, Math. Z., 2024, 308(1).

[3] A. Bodzenta, T. Pełka, D. Weissmann, *Saturated algebraic spaces*, w przygotowaniu.

Charaktery na nieskończonych grupach dyskretnych i ich zastosowania

Artem Dudko

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: adudko@impan.pl

Charakter na grupie to dodatnio półokreślona funkcja stała w klasach sprzężenia. Charaktery pojawiają się naturalnie jako 1) ślady reprezentacji unitarnych, 2) miary punktów stałych dla działań grupowych zachowujących miarę. Jednym z kluczowych problemów klasyfikacyjnych w teorii reprezentacji nieskończonej grupy dyskretnej jest opis nierozkładalnych charakterów (punktów ekstremalnych w sympleksie charakterów) na tej grupie. W tym wykładzie przedstawię przegląd charakterów nieskończonych grup dyskretnych i niektórych z ich zastosowań w innych dziedzinach, w tym:

- działania ergodyczne grup,
- niezmiennie podgrupy losowe,
- niezmiennie podalgebry grupowych algebr von Neumanna.

Wykład częściowo opiera się na wynikach pracy prelegenta i współautorów, w tym [1, 2, 3, 4, 5].

MSC (2020): 20C15, 37A15, 47L30

Literatura

- [1] T. Amrutam, A. Dudko, Y. Jiang, A. Skalski, *Invariant subalgebras rigidity for von Neumann algebras of groups arising as certain semidirect products*, ArXiv:2507:12824.
- [2] A. Dudko, R. Grigorchuk, *Characters and IRS's on branch groups and embeddings into hyperfinite factor*, ArXiv:2312:13124.
- [3] A. Dudko, Y. Jiang, *A character approach to the ISR property*, ArXiv:2410:14517.
- [4] A. Dudko, K. Medynets, *Finite Factor Representations of Higman-Thompson groups*, Groups, Geometry, and Dynamics, 2014, 8(2), 375–389.

- [5] A. Dudko, K. Medynets, *On invariant random subgroups of block-diagonal limits of symmetric groups*, Proc. of AMS, 2019, 147(6), 2481–2494.

Tasowanie drzew a hipoteza jakobianowa

Piotr Dyszewski

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: pdysz@math.uni.wroc.pl

Przedstawiamy kombinatoryczne podejście do hipotezy jakobianowej, która mówi, że każde odwzorowanie Kellera (czyli przekształcenie wielomianowe o stałym, niezerowym wyznaczniku Jacobiego) jest odwracalne w sensie wielomianowym [2]. Hipotezę tę można sformułować w kategoriach problemu tasowania poddrzew w drzewach Catalana [3, 4]. Wykorzystując teorię procesów gałązkowych, pokażemy, że hipoteza o tasowaniu poddrzew zachodzi w sensie asymptotycznym, co pozwala wywnioskować asymptotyczną wersję hipotezy jakobianowej [1].

MSC (2020): 60J80, 05C05, 14R15

Literatura

- [1] E. Bisi, P. Dyszewski, N. Gantert, S. Johnston, J. Prochno, D. Schmid, *Random planar trees and the Jacobian conjecture*, ArXiv:2301.08221.
- [2] O.-H. Keller, *Ganze Cremona-Transformationen*, Monatsch. Math. Phys., 1939, 47, 299–306.
- [3] D. Singer, *Toward a combinatorial proof of the Jacobian conjecture!*, Electron. J. Comb., 2011, 18(2).
- [4] D. Wright, *Reversion, trees, and the Jacobian conjecture*, Combinatorial and computational algebra (Hong Kong, 1999), 249–267, Contemp. Math. 264, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

Ile teorii mnogości zawiera logika? O pewnych zastosowaniach teorii dowodu w logice klas

Andrzej Indrzejczak

Uniwersytet Łódzki

e-mail: andrzej.indrzejczak@filhist.uni.lodz.pl

Jednym z popularnych stanowisk w sporze o podstawy matematyki był logicyzm proponujący redukcję matematyki do logiki. Problemy z ujęciem formalnym logicyzmu, który byłby dla potrzeb matematyków bezpieczny (system Fregego okazał się sprzeczny) i praktyczny (teoria typów Russella i Whiteheada była zbyt skomplikowana), doprowadziły do zarzucenia tego projektu. Aksjomatyczne ujęcia teorii mnogości, zwłaszcza ZFC, są traktowane jako standard od ponad stu lat, a teoria mnogości wydaje się precyzyjnie odseparowana od logiki. Sporadyczne próby reaktywacji osłabionych form logicyzmu nie cieszyły się popularnością, poza kręgiem filozofów matematyki. Wydaje się jednak, że rozwój współczesnej teorii dowodu umożliwia podjęcie obrony słabszej wersji logicyzmu określanej jako strukturalny neologicyzm (Tennant [1]).

W projekcie strukturalnego neologicyzmu nie chodzi o redukcję matematyki do logiki, ale o uwyrażnienie różnicy między znaczeniem dyskursu matematycznego a istnieniem obiektów, o których się mówi. Przydatne jest odwołanie się do rozróżnienia między klasami – dowolnymi kolekcjami, które można scharakteryzować za pomocą języka, a zbiorami – klasami, które istnieją. Tennant [1] konstruuje pewną (nieklasyczną) logikę klas Fregego (FCT), która charakteryzuje podstawowe pojęcia teorio-mnogościowe, ale nie pozwala na dowodzenie twierdzeń o istnieniu obiektów, które pod nie podpadają. Innym rozwiązaniem jest oparta na logice klasycznej wirtualna teoria klas (VTC) zaproponowana przez Quine’a [2]. W obu przypadkach kluczowe jest stosowanie abstraktów jako reprezentantów klas, a środki współczesnej teorii dowodu dostarczają właściwych narzędzi do precyzyjnego ujęcia zarówno FCT jak i VTC.

Teoria dowodu, zaproponowana jako autonomiczny dział matematyki przez Davida Hilberta, rozwinęła specyficzne narzędzia analizy dowodu dzięki Gerhardowi Gentzenowi w latach 30-tych XX w. Zwłaszcza rachunki sekwentowe, dzięki specyficznej formie reguł, okazały się nieocenionym środkiem w badaniach teorio-dowodowych. Ich zastosowanie doprowadziło do wielu ważnych wyników o specyficznym charakterze, jak twierdzenia o eliminacji cięcia, normalizacji dowodu, czy własności podformuł. Umożliwiają one dla wielu teorii również konstruktywne dowody wyników teorio-modelowych, jak niesprzeczność, rozstrzygalność czy interpolacja. Pośrednio wyniki związane z rachunkami sekwentowymi przyczyniły się też do rozwinięcia teoretycznych podstaw dla automatyzacji dowodzenia i konstrukcji systemów rezolucji czy tablicowych, które są tam powszechnie wykorzystywane.

Niestety badania nad regułowym ujęciem operatorów nazwotwórczych, takich jak operator abstrakcji, nie były wcześniej podejmowane. Z tego powodu

trudno uzyskać rachunki sekwentów, które charakteryzowałyby w zadowalający sposób systemy teorii mnogości lub logiki klas, takie jak VTC. Główny nurt badań teorio-dowodowych nad teorią mnogości (ordinal proof theory) nie wymagał takich modyfikacji rachunku sekwentów. Również w automatycznym dowodzeniu twierdzeń używa się systemów z dodanymi aksjomatami teorii mnogości (np. w środowisku Metamath, HOL, Isabelle czy Mizar).

Zaprezentujemy inne podejście do klas w ramach strukturalnej teorii dowodu, w postaci czysto regułowego ujęcia VTC jako rachunku sekwentów, dla którego można udowodnić twierdzenie o eliminacji cięcia i pewne jego konsekwencje (np. niesprzeczność VTC). System ten można modularnie poszerzać za pomocą reguł charakteryzujących rozmaite operacje i predykaty teorio-mnogościowe. Pokażemy też, że można na jego podstawie uzyskać istotne fragmenty takich teorii jak ZF w sposób czysto regułowy, bez dodawania aksjomatów. W przypadku takich wzmocnień wychodzimy już poza logikę klas, gdyż reguły te pozwalają na dowody egzystencjalne (np. dowody aksjomatów istnienia pary, sumy, zbioru potęgowego, nieskończoności).

Badania zostały zrealizowane w ramach projektu ExtenDD finansowanego przez European Research Council (ERC ADG 101054714).

MSC (2020): 03B35, 03E30, 03F05, 03F07

Literatura

- [1] N. Tennant, *Frege's Class Theory and the Logic of Sets*, w: Peter Schroeder-Heister on Proof-Theoretic Semantics. Springer, 2024, 85–134.
- [2] W. Van O. Quine, *Set Theory and its Logic*, The Belknap Press, Harvard, 1963.

O pewnych nowych rezultatach dotyczących rozkładu na solitony

Jacek Jendrej

Sorbonne Université

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: jjendrej@agh.edu.pl

Dyspersyjne równania różniczkowe cząstkowe są równaniami ewolucyjnymi (tzn. uwzględniającymi czas), których rozwiązania zachowują energię, ale mogą zanikać w długim czasie z powodu faktu, że różne częstotliwości rozchodzą

się z różnymi prędkościami. W niektórych przypadkach istnieją specjalne rozwiązania nazywane *solitonami*, które nie zmieniają swojego kształtu w miarę upływu czasu. Hipoteza o rozkładzie na solitony przewiduje, że solitony są jedyną przeszkodą dla zaniku rozwiązań. Dokładniej ujmując, każde rozwiązanie ostatecznie rozkłada się na superpozycję solitonów oraz zanikającego członu nazywanego *radiacją*.

Omówimy tę hipotezę w kontekście krytycznego równania odwzorowań falowych, które jest analogiem równania falowego dla odwzorowań z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{S}^2$. Solitony odpowiadają *odwzorowaniom harmonicznym*, które zostały sklasyfikowane przez Eellsa i Wooda w 1976 roku. Rozważamy rozwiązania *ekwiwariantne*, tzn. zachowujące pewną symetrię względem której równanie jest niezmiennicze. We wspólnej pracy z Andrew Lawrie udowadniamy, że rozkład na solitony zachodzi dla rozwiązań ekwiwariantnych. Nasz dowód opiera się na analizie *kolizji* solitonów oraz użyciu odpowiedniego lokalnego funkcjonału Lapunowa, które razem pozwalają udowodnić *lemat o niepowracaniu* dla konfiguracji wielosolitonowych.

Rozwijając niektóre z tych idei, rozwiązujemy, we wspólnej pracy z Andrew Lawrie i Wilhelmem Schlgiem, analogiczny problem dla równania ciepła odwzorowań harmonicznym (wprowadzonego przez Eellsa i Sampsona w 1964 roku) *bez założenia jakiegokolwiek symetrii* danych początkowych.

MSC (2020): 35L71, 37K40

Józef Marcinkiewicz (1910–1940) – w 115 rocznicę urodzin i 85 rocznicę śmierci

Lech Maligranda

Politechnika Poznańska

e-mail: lech.maligranda@put.poznan.pl

Nazwisko Józefa Marcinkiewicza (1910–1940) nie jest znane wielu osobom, poza być może niewielką grupą matematyków i historyków matematyki, chociaż jego wpływ na analizę i rachunek prawdopodobieństwa XX wieku był znaczący. W odczycie przedstawiona zostanie jego postać w 115. rocznicę urodzin i 85. rocznicę śmierci.

Omówienie zostało podzielone na okres 1910–1933, tj. od jego urodzin do ukończenia Uniwersytetu Stefana Batorego (USB) w Wilnie oraz okres uzyskiwa-

nia stopni naukowych (1933–1937): magisterium w 1933 r., doktorat w 1935 r. i habilitacja w 1937 r. Następnie mowa jest o pracy w USB (1935–1939), a także wspomina się o okresie związanym z wojskiem (1933–1934) i pobytach we Lwowie (1935–1936), a także w Paryżu i Londynie (1938–1939). W czerwcu 1939 r. został profesorem Uniwersytetu Poznańskiego, ale nie objął katedry matematyki z powodu wybuchu wojny. Znajdziemy tu również informacje o jego pobycie w sowieckim obozie w Starobielsku od września 1939 r. oraz egzekucji w Charkowie w pierwszej połowie 1940 roku.

Marcinkiewicz napisał 55 prac naukowych w ciągu sześciu lat (1933–1939), z roczną przerwą na służbę wojskową. Zajmował się analizą funkcjonalną, teorią prawdopodobieństwa, teorią funkcji rzeczywistych i zespolonych, szeregami trygonometrycznymi, szeregami Fouriera i szeregami ortogonalnymi oraz teorią aproksymacji. Nazwisko Marcinkiewicza w matematyce jest związane z twierdzeniem interpolacyjnym Marcinkiewicza, przestrzeniami funkcji i ciągów Marcinkiewicza, całką i funkcją Marcinkiewicza, nierównościami wektorowymi Marcinkiewicza–Zygmunda, silnym prawem wielkich liczb Marcinkiewicza–Zygmunda, twierdzeniem Marcinkiewicza o mnożnikach, twierdzeniem Jessena–Marcinkiewicza–Zygmunda o silnym różniczkowaniu, hipotezą Marcinkiewicza–Salema, twierdzeniem Marcinkiewicza o funkcji charakterystycznej i twierdzeniem Marcinkiewicza o całce Perrona.

Dzięki Antoniemu Zygmundowi, który przeżył wojnę i stał się wybitnym matematykiem na świecie, nazwisko Marcinkiewicza stało się także szeroko znane w środowisku matematycznym. Na sytuację tę wpłynęła klasyczna monografia Zygmunda [8], w której znalazło się wiele twierdzeń Marcinkiewicza. Zygmund zadedykował swoją dwutomową monografię [8] pamięci Aleksandrowi Rajchmanowi i Józefowi Marcinkiewiczowi – swojemu nauczycielowi i swojemu uczniowi.

Więcej informacji o Marcinkiewiczach znajdziemy w poniższych pozycjach. Szczególnie polecam 102 stronicowy artykuł [1] oraz film [10].

MSC (2020): 46E30, 46B70

Literatura

- [1] L. Maligranda, *Józef Marcinkiewicz (1910–1940) – on the centenary of his birth*, Banach Center Publ., 2011, 95, 133–234.
- [2] L. Maligranda, *Marcinkiewicz interpolation theorem and Marcinkiewicz spaces*, Wiad. Mat., 2012, 48(2), 157–171.

- [3] L. Maligranda, *Osiągnięcia polskich matematyków w teorii interpolacji operatorów: 1910–1960*, Wiad. Mat., 2015, 51(2), 239–281.
- [4] L. Maligranda i W. Wnuk, *Józef Marcinkiewicz (1910–1940)*, w: *100 lat matematyki na Uniwersytecie w Poznaniu 1919–2019*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2021, 291–307 i 454–455.
- [5] *Józef Marcinkiewicz, Collected Papers*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, PWN, Warszawa 1964.
- [6] *Józef Marcinkiewicz. Genialny matematyk. Męczennik Katynia*. Praca zbiorowa pod redakcją Janiny Marciak-Kozłowskiej i Emilii Jakimowicz, Wydawnictwo BUK, Białystok, 2011.
- [7] A. Zygmund, *On a theorem of Marcinkiewicz concerning interpolation of operations*, J. Math. Pures Appl., 1956, 35, 223–248.
- [8] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vols. I, II*, Cambridge University Press, 1959.
- [9] A. Zygmund, *Józef Marcinkiewicz*, Wiad. Mat.. 1960, 4, 11–41.
- [10] Film dokumentalno-fabularyzowany *Wybraniec Bogów* o Józefie Marcinkiewicz, Instytut Pamięci Narodowej, 62 minuty, <https://www.youtube.com/watch?v=54VF6nzHKg8>.

Wokół pierścieni Armendariza z polskimi akcentami

Ryszard Mazurek

Politechnika Białostocka

e-mail: r.mazurek@pb.edu.pl

Pierścień R , niekoniecznie przemienny, nazywamy *pierścieniem Armendariza*, jeżeli dla dowolnych dwóch wielomianów $f = \sum a_i x^i$, $g = \sum b_j x^j \in R[x]$ z równości $fg = 0$ wynika, że $a_i b_j = 0$ dla wszystkich indeksów i, j . Pojęcie to, wprowadzone w [1], zostało zainspirowane artykułem E. P. Armendariza z 1974 roku, dotyczącym anihilatorów w rozszerzeniach wielomianowych pierścienia zredukowanego.

Przedstawimy własności i przykłady pierścieni Armendariza oraz związanych z nimi pierścieni McCoya i gaussowskich, wraz z ich licznymi wariantami otrzymanymi przez zastąpienie pierścienia wielomianów $R[x]$ w definicji danej klasy innymi rozszerzeniami pierścieniowymi, takimi jak pierścień półgrupowe $R[S]$, pierścień szeregów potęgowych $R[[x]]$ czy pierścień skośnych wielomianów $R[x, \sigma]$. Pokażemy również sposób unifikacji tych wariantów za pomocą skośnych uogólnionych szeregów potęgowych.

Pierścienie Armendariza, McCoya i gaussowskie oraz ich warianty są intensywnie badane, zwłaszcza zależności między strukturą takich pierścieni a własnościami odpowiadających im rozszerzeń pierścieniowych. Przedstawimy najważniejsze wyniki dotyczące tych pierścieni, ze szczególnym uwzględnieniem prac, których autorami lub współautorami są polscy algebraicy ([2]–[14]). Omówimy także motywacje, kontekst i znaczenie rezultatów tych prac.

MSC (2020): 06F05, 16S36, 20M99

Literatura

- [1] M.B. Rege, S. Chhawchharia, *Armendariz rings*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci., 1997, 73(1), 14–17.
- [2] C. Huh, Y. Lee, A. Smoktunowicz, *Armendariz rings and semicommutative rings*, Comm. Algebra, 2002, 30, 751–761.
- [3] K. Kozłowski, R. Mazurek, *On semi-Armendariz matrix rings*, J. Korean Math. Soc., 2015, 52(4), 781–795.
- [4] A. Leroy, J. Matczuk, *On right strongly McCoy rings*. Ring theory and its applications, 233–244, Contemp. Math., 609, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.
- [5] G. Marks, R. Mazurek, *Annelidan rings*, Forum Math., 2016, 28(5), 923–941.
- [6] G. Marks, R. Mazurek, *Rings with linearly ordered right annihilators*, Israel J. Math., 2016, 216(1), 415–440.
- [7] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A new class of unique product monoids with applications to ring theory*, Semigroup Forum, 2009, 78(2), 210–225.
- [8] G. Marks, R. Mazurek, M. Ziembowski, *A unified approach to various generalizations of Armendariz rings*, Bull. Aust. Math. Soc., 2010, 81(3), 361–397.
- [9] R. Mazurek, *On nilpotent elements, weak symmetry and related properties of skew generalized power series rings*, Symmetry, 2024, 16, 1693.
- [10] R. Mazurek, M. Ziembowski, *Right Gaussian rings and skew power series rings*, J. Algebra, 2011, 330, 130–146.
- [11] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On a characterization of distributive rings via saturations and its applications to Armendariz and Gaussian rings*, Rev. Mat. Iberoam., 2014, 30(3), 1073–1088.
- [12] R. Mazurek, M. Ziembowski, *On right McCoy rings and right McCoy rings relative to u.p.-monoids*, Commun. Contemp. Math., 2015, 17(4), 1550049.
- [13] W. Wang, E. R. Puczyłowski, L. Li, *On Armendariz rings and matrix rings with simple 0-multiplication*, Comm. Algebra, 2008, 36(4), 1514–1519.

- [14] Y. Zhou, M. Ziemkowski, *Distributive modules and Armendariz modules*, J. Math. Soc. Japan, 2015, 67(2), 789–796.

Geometria nieprzemieniana: od topologii do funkcjonałów spektralnych

Andrzej Sitarz

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: andrzej.sitarz@uj.edu.pl

Geometria nieprzemieniana ma swoje źródła w przełomowych twierdzeniach Gelfanda i Gelfanda-Naimarka i twierdzeniu o indeksie Atiyah-Singera, jednak dopiero prace Alaina Connesa pozwoliły usystematyzować geometryczny opis obiektów będących odpowiednikami rozmaitości. W wykładzie postaram się pokazać drogę nieprzemiennej geometrii od jej sformułowania, poprzez główne przykłady, pomysły zastosowania w fizyce oddziaływań fundamentalnych aż po możliwości spektralnego badania geometrycznych obiektów na przestrzeniach klasycznych i nieprzemienianych.

MSC (2020): 58B34

Spacerem przez matematykę powiazaną z informacją kwantową: przykłady własne

Karol Życzkowski

Uniwersytet Jagielloński

Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

e-mail: karol@cft.edu.pl

Które działy *matematyki* są przydatne w badaniach nad teorią kwantową? Bardzo różne, jak pokazują wieloletnie doświadczenia autora [4]. Z drugiej strony, problemy ważne z punktu widzenia teorii informacji kwantowej mogą stać się inspiracją dla prac badawczych w rozmaitych dziedzinach matematyki czystej.

W artykule Michaela Atiyaha i innych [2] z roku 2010 autorzy pisali: *The presence of physics in contemporary pure mathematics is undeniable and has presented the community with both opportunities and challenges.*

Podczas referatu przedstawię wybrane prace dotyczące algebry liniowej, teorii macierzy, matematyki dyskretnej i kombinatoryki, teorii grup i reprezentacji, teorii operatorów, rachunku prawdopodobieństwa i macierzy losowych, układów dynamicznych i fraktali, geometrii zbiorów wypukłych oraz zagadnień transportu, które były inspirowane mechaniką kwantową [1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. Pewien poruszany wątek dotyczy także teorii liczb. Kluczowym omawianym wynikiem będzie:

Twierdzenie 1. *Rozważmy losową parę (M, F) składającą się z matematyka i fizyka teoretyka. Wtedy z prawdopodobieństwem $p > 0$ będą oni mogli razem owocnie pracować nad zagadnieniami interesującymi dla obu stron.*

Dowód. Przez pokazanie konstruktywnych przykładów [1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. □

Hipoteza 2. Gdy losujemy pary niezależnie w zbiorach „rozsądnych matematyków” oraz „rozsądnych fizyków” według miary jednorodnej, to prawdopodobieństwo zdefiniowane powyżej zachowuje się jak $p = 1 - \epsilon$, gdzie $\epsilon \ll 1$.

Hipoteza 3. W następstwie naturalnej ewolucji czasowej liczba ta asymptotycznie dąży do 1, czyli $\lim_{t \rightarrow \infty} \epsilon(t) = 0$.

MSC (2020): 81P40, 81Q50

Literatura

- [1] R. Adamczak, R. Łatała, Z. Puchała, K. Życzkowski, *Asymptotic entropic uncertainty relations*, J. Math. Phys., 2016, 57, 032204.
- [2] M. Atiyah, R. Dijkgraaf and N. Hitchin, *Geometry and physics*, Phil. Trans. R. Soc. 2010, A 368, 913.
- [3] T. Banica, I. Nechita, K. Życzkowski, *Almost Hadamard matrices: general theory and examples*, Open Syst. Inf. Dyn. 2012, 19, 1250024–26.
- [4] I. Bengtsson, K. Życzkowski, *Geometry of Quantum States: An introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press, 2017.
- [5] E. Bollt, P. Gora, A. Ostruszka, K. Życzkowski, *Basis Markov partitions and transition matrices for stochastic systems*, SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2008, 7, 341–360.
- [6] M.D. Choi, D. W. Kribs, K. Życzkowski, *Higher-rank numerical ranges and compression problems*, Lin. Alg. Appl., 2006, 418, 828–839.

- [7] S. Cole, M. Eckstein, S. Friedland, K. Życzkowski, *Quantum Optimal Transport*, Math. Physics, Analysis and Geometry 2024, 26, 14.
- [8] B. Collins, P. Gawron, A. E. Litvak, K. Życzkowski, *Numerical range for random matrices*, J. Math. Anal. Appl., 2014, 418, 516–533.
- [9] C. F. Dunkl, P. Gawron, J. A. Holbrook, Z. Puchała, K. Życzkowski, *Numerical shadows: Measures and densities on the numerical range*, Lin. Algebra Appl. 2011, 434, 2042–2080.
- [10] E. Gutkin, K. Życzkowski, *Joint numerical ranges, quantum maps, and joint numerical shadows*, Lin. Alg. Appl., 2013, 438, 2394–2404.
- [11] W. Młotkowski, K. Penson, K. Życzkowski, *Densities of the Raney distributions*, Documenta Math., 2013, 18, 1573–1596.
- [12] Ł. Skowronek, E. Stormer, K. Życzkowski, *Cones of positive maps and their duality relations*, J. Math. Phys., 2010, 50, 062106–18.
- [13] S. Szarek, I. Bengtsson, K. Życzkowski, *On the structure of the body of states with positive partial transpose*, J. Phys., 2006, A 39, L119–L126.
- [14] T. Tkocz, M. Smaczyński, M. Kuś, O. Zeitouni, K. Życzkowski, *Tensor Products of Random Unitary Matrices*, Random Matrices: Theory and Applications, 2012, 1, 1250009–26.
- [15] K. Życzkowski, W. Słomczyński, *Monge distance between quantum states*, J. Phys., 1998, A 31, 9095–9104.

Referaty

Algebry operatorowe i geometria nieprzemien- na

Grupoidowe algebry Banacha: topologiczna wolność a wykrywanie ideałów

Krzysztof Bardadyn

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: kbardadyn@math.uwb.edu.pl

Jednym z podstawowych wyników teorii C^* -algebr związanych z układami dynamicznymi jest charakteryzacja prostoty produktu krzyżowego działania grupy dyskretnej na przestrzeni topologicznej. Kluczową rolę odgrywają tutaj pojęcia topologicznej wolności oraz minimalności działania. Ten klasyczny wynik został uogólniony w pracy [2] na działania topologicznych grupoidów Hausdorffa spełniających drugi warunek przeliczalności. W tym referacie zdefiniuję algebrę Banacha związaną z grupoidem étalnym oraz omówię pojęcie topologicznej wolności grupoidu w kontekście własności wykrywania ideałów w grupoidowej algebrze Banacha. W konsekwencji otrzymam charakteryzację prostoty grupoidowej algebry Banacha.

Referat na podstawie pracy [1] napisanej wspólnie z Bartoszem Kwaśniewskim oraz Andrew McKee.

MSC (2020): 22A22, 46H10

Literatura

- [1] K. Bardadyn, B. Kwaśniewski, A. McKee, *Banach algebras associated to twisted étale groupoids: simplicity and pure infiniteness*, ArXiv:2406.05717.

- [2] J. Renault, *The ideal structure of groupoid crossed product C^* -algebras*, J. Operator Theory, 1991, 25(1), 3–36.

Kilka uwag o rachunku różniczkowym na sferach Podlesia

Tomasz Brzeziński

Uniwersytet w Białymstoku

Swansea University

e-mail: t.brzezinski@uwb.edu.pl

Bimoduł jednoform dwuwymiarowego rachunku różniczkowego na algebrze funkcji na standardowej sferze Podlesia $\mathcal{O}(S_q^2)$, tzn. na algebrze otrzymanej jako punkty stałe kodziałania algebry Hopfa $\mathcal{O}(U(1))$ na algebrę Hopfa $\mathcal{O}(SU_q(2))$ (równoważnie: podalgebry $\mathcal{O}(SU_q(2))$ złożonej z elementów stopnia zero w silnej $\mathbb{Z}$ -gradacji $\mathcal{O}(SU_q(2))$) ma naturalną interpretację jako suma $\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_{-2}$ modułów cięć na liniowych wiązkach nieprzemiennych nad S_q^2 o topologicznym ładunku ± 2 . Tematem referatu jest przedstawienie próby skonstruowania rachunku różniczkowego na algebrach funkcji ogólnych (w tym tzw. niestandardowych) sfer Podlesia $\mathcal{O}(S_{q,s}^2)$, posiadającego analogiczną, równie naturalną interpretację.

Prezentowane wyniki uzyskane zostały we współpracy z Réamonnem Ó Buachallą z Uniwersytetu Karola w Pradze w ramach wspólnego projektu *Kwantowa geometryczna teoria reprezentacji i rozwłóknienia nieprzemienne*, finansowanego przez NCN, grant WEAVE-UNISONO 2023/05/Y/ST1/00046.

MSC (2020): 58B32

Grupy kwantowe i własności aproksymacyjne

Jacek Krajczok

Vrije Universiteit Brussel

e-mail: jacek.krajczok@vub.be

Dla grupy dyskretnej średniowalność jest własnością o fundamentalnym znaczeniu. Można ją opisać jako istnienie ograniczonej jedynek aproksymatywnej w algebrze Fouriera tejże grupy, ale ma ona również wiele innych charakterystyk. Pojęcie średniowalności znajduje zastosowania między innymi w teorii układów dynamicznych, analizie harmonicznej i teorii algebr operatorów. Jest to

własność dość mocna i często rozważa się jej słabsze warianty takie jak np. słaba średniowalność, czy własność aproksymacyjna AP Haagerupa-Krausa.

W moim referacie omówię wspomniane wyżej własności aproksymacyjne w kontekście dyskretnych grup kwantowych, ich zachowanie i związki z własnościami algebr operatorów i modułów operatorowych stowarzyszonych z dyskretnymi grupami kwantowymi.

MSC (2020): 46L67, 22D55, 43A30

Twierdzenie Tarskiego i dychotomia dla C^* -algebr grupoidowych

Bartosz Kwaśniewski

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: b.kwasniewski@uwb.edu.pl

Niemal sto lat temu Alfred Tarski [5] opracował teorię półgrup typów zbiorów równorozkładalnych dla działań grupowych, która okazała się bardzo użytecznym narzędziem do badania zjawisk takich jak paradoks Banacha-Tarskiego [1]. Niezależnie, w pracach [2, 4], półgrupy typów z działań grup dyskretnych zostały uogólnione na przypadek totalnie niespójnych groupoidów étalnych i zastosowane do analizy związanych z nimi C^* -algebr. W tym referacie omówię, jak uogólnić tę teorię tak, aby objąć nią dowolne (skręcone) groupoidy étalne oraz jak abstrakcyjne twierdzenie Tarskiego dla półgrup prowadzi do dychotomii dla prostych algebr grupoidowych – są one albo stabilnie skończone, albo czysto nieskończone. Wynik ten można traktować jako dynamiczną wersję dychotomii, która zachodzi dla „klasyfikowalnych” C^* -algebr prostych.

Referat na podstawie pracy [3] napisanej wspólnie z Ralfem Meyerem i Aksharą Prasadem, z Georg-August-Universität Göttingen.

MSC (2020): 46L55, 20M18, 22A22

Literatura

- [1] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*, Fundamenta Mathematicae, 1924, 6(1), 244–277.
- [2] C. Bönicke, K.Li, *Ideal structure and pure infiniteness of ample groupoid C^* -algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 2020, 40(1), 34–63.

- [3] B. Kwaśniewski, R. Meyer, A. Prasad, *Type semigroups for twisted groupoids and a dichotomy for groupoid C^* -algebras*, ArXiv:2502.17190
- [4] T. Rainone, A. Sims, *A dichotomy for groupoid C^* -algebras*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 2020, 40(2), 521–563 .
- [5] A. Tarski, *Algebraische Fassung des Maßproblems*, Fundamenta Mathematicae, 1938, 31(1), 207–223.

Tensory z widm

Andrzej Sitarz

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: andrzej.sitarz@uj.edu.pl

Geometria spektralna pozwala na analizę różnych wielkości (jak objętość czy skalar krzywizny) badając asymptotykę widm operatorów na rozmaitościach. W cyklu prac (z L. Dąbrowskim i P. Zaleckim) pokazaliśmy jak skonstruować geometryczne obiekty tensorowe i zdefiniować je dla rozmaitości nieprzemiennych.

MSC (2020): 58J50

Zwarte grupy kwantowe, faktory typu III i pewne niezmienniki

Piotr Sołtan

Uniwersytet Warszawski

e-mail: piotr.soltan@fuw.edu.pl

W badaniu konstrukcji zwartych grup kwantowych $\mathbb{G}$ takich, że algebra $L^\infty(\mathbb{G})$ jest faktorem typu III ([1]) przydatne okazały się pewne podgrupy $\mathbb{R}$ wyznaczone przez $\mathbb{G}$, które są niezmiennikami izomorfizmu grup kwantowych. W referacie opowiem o tym jak bardziej systematyczne badanie tych niezmienników prowadzi do ciekawych wyników łączących wewnętrzną automorfizmów skalowania ze śladowością miary Haara.

MSC (2020): 46L67, 20G42

Literatura

- [1] J. Krajczok, P.M. Sołtan, *Examples of compact quantum groups with $L^\infty(\mathbb{G})$ a factor*, J. Funct. Anal. 2024, 286 110297-1–57.

Generyczne grafy kwantowe nie mają kwantowych symetrii

Mateusz Wasilewski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: mwasilewski@impan.pl

Grafy kwantowe to nieprzemienne odpowiedniki grafów, naturalne zarówno z punktu widzenia informacji kwantowej, jak i geometrii nieprzemiennej. W ostatnich latach są one przedmiotem intensywnych badań. Opowiem o symetriach losowych grafów kwantowych.

W klasycznej pracy [2] udowodniono, że zdecydowana większość grafów nie posiada nietrywialnych symetrii. Wynik ten został rozszerzony w [1] na przypadek *klasycznych* symetrii losowych grafów kwantowych. W najnowszej pracy udowodniliśmy, że również *kwantowa* grupa automorfizmów losowego grafu kwantowego jest trywialna. Praca wspólna z Alexandru Chirvasitu i Piotrem Sołtanem.

MSC (2020): 46L89, 46L67

Literatura

- [1] A. Chirvasitu, M. Wasilewski, *Random quantum graphs*, Trans. Am. Math. Soc., 2022, 375(5), 3061–3087.
- [2] P. Erdős, A. Rényi, *Asymmetric graphs*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1963, 14:295–315.

Algebry grafowe i nieprzemienne probabilistyka

Anna Wysoczańska-Kula

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: anna.kula@math.uni.wroc.pl

Algebry grafowe to pewne specjalne algebry C^* , generowane przez projekcje i częściowe izometrie, które "można zobaczyć" poprzez definiujące je grafy. Stanowią bogatą, a jednocześnie dość wygodną do badań rodzinę algebr operatorowych, a niektóre ich własności (np. strukturę ideałów czy K-teorię) można określić, patrząc na definiujące je grafy. Wiele znanych algebr C^* jest algebrami grafowymi (np. algebra Toeplitza, $M_n(\mathbb{C})$, grupa kwantowa $SU_q(2)$ czy sfery kwantowe, patrz [2]).

W czasie mojego wystąpienia opowiem o dwóch wynikach łączących teorię algebr grafowych z nieprzemienią probabilistyką.

(1) W pracy [3] opisano operatory, które stanowią model zmiennych bm -niezależnych. Okazuje się, że operatory te tworzą algebrę Exel-Laca, która jest pełnym narożnikiem algebry grafowej, więc też dziedziczy wiele jej własności. Otrzymany wynik uogólnia i rozszerza rezultaty z pracy [1].

(2) Z algebrami grafowymi można stowarzyszyć pewne przestrzenie Focka, a na nich rozważać naturalne operatory kreacji i anihilacji. Pozwala to na powiązanie z grafem nieprzemiennej przestrzeni probabilistycznej i badanie rozkładów operatorów położenia (czyli sumy kreacji i anihilacji). Okazuje się, że można w ten sposób stowarzyszyć z grafem skierowanym ciągi momentów oraz miary. Kilka takich przykładów przedstawię.

Prezentowane wyniki zostały uzyskane wspólnie z Jackiem Spielbergiem, Mariuszem Tobolskim i Januszem Wysoczańskim w ramach projektu EU Grant 101086394 „Operator Algebras that One Can See”.

MSC (2020): 46L05, 46L53

Literatura

- [1] V. Crismale, S. Del Vecchio, S. Rossi, J. Wysoczański, *Weakly-monotone C^* -algebras as Exel-Laca algebras*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2025, 204, 1075–1094.
- [2] I. Raeburn, *Graph algebras*, CBMS Reg. Conf. Ser. Math., 103, AMS 2005.
- [3] J. Wysoczański, *bm -independence and bm -Central Limit Theorems associated with symmetric cones*, Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top., 2010, 13(3), 461–488.

Dwa oblicza fizyki matematycznej

Trójka Tulczyjewa w działaniu

Katarzyna Grabowska

Uniwersytet Warszawski

e-mail: konieczn@fuw.edu.pl

Prowadząc badania nad układami kwantowymi, Włodzimierz Tulczyjew doszedł do wniosku, że część fundamentalnych problemów mechaniki kwantowej ma swoje źródła w niewłaściwym rozumieniu mechaniki klasycznej. Przemyslenia dotyczące wariacyjnego opisu układów statycznych oraz wariacyjnego podejścia do dynamiki zaowocowały między innymi zdefiniowaniem struktury geometrycznej, nazywanej w literaturze *trójką Tulczyjewa*.

Referat poświęcony będzie prezentacji przykładów układów mechanicznych, których opis przy pomocy narzędzi związanych z trójką Tulczyjewa daje interesujące rezultaty. W niektórych przypadkach, na przykład dla cząstki relatywistycznej, otrzymane wyniki różnią się od powszechnie spotykanych w literaturze. W pozostałych sytuacjach, otrzymujemy znane równania fazowe lub równania ruchu, jednak ich wyprowadzenie jest eleganckie i bardzo proste koncepcyjnie. Omówione przykłady zaczerpnięte będą z publikacji [1, 2, 3].

MSC (2020): 70G45, 70H03, 53C99, 53D17

Literatura

- [1] K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbański, *Geometrical Mechanics on algebroids*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 2006, 3, 559–575.
- [2] K. Grabowska, M. Zając, *The Tulczyjew triple in mechanics on a Lie group*, J. Geom. Mech., 2016, 8(4), 413–435.

- [3] W. M. Tulczyjew, P. Urbański, *A slow and careful Legendre transformation for singular Lagrangians*, The Infeld Centennial Meeting (Warsaw, 1998), Acta Phys. Polon. B, 1999, 30, 2909–2978.

Geometria trójki Tulczyjewa

Janusz Grabowski

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: jagrab@impan.pl

Struktura geometryczna, znana jako *trójka Tulczyjewa*, okazała się bardzo użyteczna w opisie układów mechanicznych, nawet tych z osobliwymi lagrażjanami lub podlegających więzom. Opiera się ona na filozofii stojącej za zasadami rachunku wariacyjnego w mechanice i teoriach pola, w której zasadniczą rolę odgrywa dynamika fazowa [4, 5] i jest zbudowana z kanonicznych izomorfizmów pomiędzy iterowanymi wiązkami stycznymi i kostycznymi: TT^*Q , T^*T^*Q oraz T^*TQ , które są kanonicznymi przykładami podwójnych wiązek wektorowych.

Główną zaletą tego podejścia jest jego ogólność: umożliwia ono generowanie równań fazowych niezależnie od tego, czy lagrażjan jest regularny, czy nie. Kolejną zaletą jest elastyczność: metoda ta może być z łatwością dostosowana do różnych kontekstów, w tym mechaniki na algebroidach Liego [2] czy teorii pola [1]. Przedstawimy geometryczne podstawy trójki Tulczyjewa, opierając się na prostym podejściu do koncepcji *podwójnej wiązki wektorowej* [3].

MSC (2020): 70G45, 70H03, 53C99, 53D17

Literatura

- [1] K. Grabowska, J. Grabowski, *Tulczyjew triples: from statics to field theory*, J. Geom. Mech., 2013, 5, 445–472.
- [2] K. Grabowska, J. Grabowski, P. Urbański, *Geometrical Mechanics on algebroids*, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys., 2006, 3, 559–575.
- [3] J. Grabowski, M. Rotkiewicz, *Higher vector bundles and multi-graded symplectic manifolds*, J. Geom. Phys., 2009, 59(9), 1285–1305.
- [4] W.M. Tulczyjew, *Hamiltonian systems, Lagrangian systems, and the Legendre transformation*, Symposia Math., 1974, 14, 101–114.

- [5] W.M. Tulczyjew, P. Urbański, *A slow and careful Legendre transformation for singular Lagrangians*, The Infeld Centennial Meeting (Warsaw, 1998), Acta Phys. Polon. B, 1999, 30, 2909–2978.

Symetrie grupy renormalizacji

Piotr Kielanowski

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: piotr.kielanowski@fuw.edu.pl

Zostanie zaproponowana metoda badania własności równań grupy renormalizacji [1] w kwantowej teorii pola oparta na analizie wielomianów niezmienniczych. W szczególności zostanie wykorzystane twierdzenie Moliena [3] definiujące funkcję generującą dla liczby niezmienniczych jednorodnych wielomianów [2] danego stopnia względem grupy symetrii.

MSC (2020): 13A50, 81T15, 81T17

Literatura

- [1] J. Collins, *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*, Cambridge University Press, 2023.
- [2] J. Komorowski, *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, 1978, Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [3] Th. Molien, *Über die Invarianten der linearen Substitutionsgruppen*, Sitzungber. Königl. Preuss. Akad. Wiss. (J. Berl. Ber.), 1897, 52, 1152–1156.

Włodzimierz Tulczyjew i jego spuścizna

Jerzy Kijowski

Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

e-mail: kijowski@cft.edu.pl

Włodzimierz Tulczyjew odegrał bardzo ważną rolę w fizyce matematycznej. Nie podążał za chwilowymi modami, nie „naciągał” matematyki do naiwnych wyobrażeń fizyków, lecz uporczywie poszukiwał struktur matematycznych objawiających się w opisie podstawowych struktur przestrzeni, czasu i materii.

W moim referacie, poza najważniejszymi danymi biograficznymi, pokażę jak naiwne są standardowe wyobrażenia o „zasadach wariacyjnych” w fizyce i co nowego pozostawił Tulczyjew nam: fizykom i matematykom.

MSC (2020): 35F60, 35L70, 49S05, 53A35, 53D05

Literatura

- [1] J. Kijowski, *On a new variational principle in general relativity and the energy of gravitational field*, Gen. Relat. Grav. Journal, 1978, 9, 857–881
- [2] J. Kijowski, *Gravity on a large scale (does it necessarily look like it does on a small scale?)*, Universe, 2024, 3(29).
- [3] J. Kijowski, W.M. Tulczyjew, *Symplectic framework for field theories*, Springer Lecture Notes in Physics, 1979, 107.

Operator homotopii vs równania zadane przez formy różniczkowe na rozmaitościach różniczkowych, w tym istotne równania fizyki

Radosław Antoni Kycia

Politechnika Krakowska

e-mail: kycia.radoslaw@gmail.com

Referat poświęcony jest metodzie rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych na rozmaitościach przy użyciu operatora homotopii. W podejściu tym równania formułowane są w języku geometrii różniczkowej, z wykorzystaniem różniczki zewnętrznej i koróżniczki. Podstawą metody jest formalna analogia pomiędzy parą operatorów (różniczka zewnętrzna, operator homotopii) a parą (operator pochodnej, operator całki) w klasycznej analizie. Analogia ta umożliwia sprowadzenie procedury rozwiązywania złożonych równań do schematu znanego z analizy równań różniczkowych zwyczajnych. Przystępność metody czyni ją wartościowym narzędziem dydaktycznym, możliwym do opanowania w ramach kursu analizy globalnej. Prezentowane wyniki bazują na pracach: [1, 2, 3].

MSC (2020): 53-08, 53B05, 53Z05

Literatura

- [1] R.A. Kycia, J. Šilhan, *Inverting covariant exterior derivative*, Anal. Math. Phys. 15, 82 (2025), DOI: [10.1007/s13324-025-01085-3](https://doi.org/10.1007/s13324-025-01085-3).
- [2] R.A. Kycia, *The Poincare Lemma for Codifferential, Anticoexact Forms, and Applications to Physics*, Results Math 77, 182 (2022), DOI: [10.1007/s00025-022-01646-z](https://doi.org/10.1007/s00025-022-01646-z).
- [3] R.A. Kycia, *The Poincare Lemma, Antiexact Forms, and Fermionic Quantum Harmonic Oscillator*, Results Math 75, 122 (2020), DOI: [10.1007/s00025-020-01247-8](https://doi.org/10.1007/s00025-020-01247-8).

O stabilności nieokresowych stanów podstawowych

Jacek Mięksiz

Uniwersytet Warszawski

e-mail: mięksiz@mimuw.edu.pl

Omówimy stabilność nieokresowych pokryw płaszczyzny kwadratowymi dachówkami Wanga i jednowymiarowych ciągów symboli układów podstawieniowych Thue-Morse’a, Fibonacciego oraz układów Sturm, postrzeganych jako stany podstawowe hamiltonianów oddziałujących cząstek. Pokażemy, że pewien rodzaj jednorodności konfiguracji, tzw. ścisły warunek brzegowy, jest niezbędny dla stabilności nieokresowych stanów podstawowych ze względu na niewielkie zaburzenia oddziaływań.

Z punktu widzenia teorii ergodycznej, zadajemy pytanie czy jedyna miara ergodyczna stanu podstawowego symbolicznego układu dynamicznego jest jedyną miarą ergodyczną dla małych zaburzeń oddziaływań między cząstkami odpowiadającymi symbolom układu dynamicznego.

Fundamentalnym problemem otwartym jest konstrukcja klasycznego gazu sieciowego z jedyną miarą stanu podstawowego, której nośnikami są konfiguracje nieokresowe i której w niskich temperaturach odpowiadają nieokresowe miary Gibbsa (stany równowagowe układu fizycznego) [1]. Byłby to pierwszy mikroskopowy model stabilnego termodynamicznie kwazikryształu.

MSC (2020): 37B10, 82B20, 52C23, 52C25

Literatura

- [1] J. Mięksisz, *Quasicrystal problem – on rigidity of non-periodic structures from statistical mechanics point of view*, ukaże się w Proceedings of the XLI Workshop on Geometric Methods in Physics, Białystok, Poland, 1-6.07.2024, ArXiv: 2412.19594

Ciągi Sturm w modelowaniu kwaziperiodycznych ośrodków sprężystych**Agnieszka Niemczynowicz**

Politechnika Krakowska

e-mail: a.niemczynowicz@pk.edu.pl

Ciągi Sturm, będące nieskończonymi słowami nad alfabetem dwuelementowym o minimalnej złożoności podciągów (dokładnie $n + 1$ różnych słów długości n), znajdują szerokie zastosowanie w modelowaniu kwaziperiodycznych struktur. W referacie przedstawiona zostanie koncepcja wykorzystania słów Sturmowskich do opisu kwaziperiodycznych rozkładów parametrów materiałowych w jednowymiarowych strukturach mechanicznych, takich jak układy masa-sprężyna, pręty czy belki Timoshenki [4].

W oparciu o interpretację geometryczną tych ciągów [7] generujemy tzw. superkomórki (*ang. supercells*) o uporządkowanej, ale nieperiodycznej budowie, których powtarzalność determinowana jest przez rozwinięcie ułamka łańcuchowego wybranej (zazwyczaj niewymiernej) liczby rzeczywistej $\alpha \in [0, 1]$ [2]. W oparciu o metodę macierzy przejścia (*ang. Transfer Matrix Method*) wyznaczane są relacje dyspersyjne, pasma zaporowe i tzw. widmo zbiorcze (*ang. bulk spectrum*), którego struktura – dla odpowiednich parametrów – wykazuje właściwości fraktalne i samopodobne [3, 4, 5].

Wystąpienie obejmie również omówienie numerycznych przykładów oraz wpływu przybliżeń wymiernych (konwergentów) na dokładność odwzorowania kwaziperiodyczności. Zostaną także zasygnalizowane potencjalne zastosowania tych struktur w inżynierii materiałowej oraz akustyce falowej [1, 6].

MSC (2020): 52C23, 74J05, 37B10**Literatura**

- [1] S. Castiñeira-Ibáñez, V. Romero-García, J.V. Sánchez-Pérez, L.M. García-Raffi, *Overlapping of acoustic bandgaps using fractal geometries*, EPL, 2010, 92(2), 24007.

- [2] A. Droubay, J. Justin, G. Pirillo, *Episturmian words and some constructions of de Luca and Rauzy*, Theor. Comput. Sci., 2001, 255(1-2), 539–553.
- [3] D. R. Hofstadter, *Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields*, Phys. Rev. B, 1976, 14(6), 2239–2249.
- [4] M. Lázaro, A. Niemczynowicz, A. Siemaszko, L.M. García-Raffi, *Elastodynamical properties of Sturmian structured media*, J. Sound Vib., 2022, 535, 117150.
- [5] E. Maciá, *Aperiodic Structures in Condensed Matter. Fundamentals and Applications*, CRC Press, 2009.
- [6] V. Romero-García, J.V. Sánchez-Pérez, L.M. García-Raffi et al., *High optimization process for increasing the attenuation properties of acoustic metamaterials*, Appl. Phys. Lett., 2008, 93, 223502.
- [7] M.P. Wojtkowski, A. Siemaszko, *Counting Berg partitions via Sturmian words and substitution tilings*, in: European Congress of Mathematics, EMS Publishing House, 2012, p. 2383.

Włodzimierz Tulczyjew – fizyk i matematyk

Paweł Urbański

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urbanski@fuw.edu.pl

Włodzimierz M. Tulczyjew (1931-2022) był najwybitniejszym uczniem Leopolda Infelda (opinia ta pochodzi od samego Infelda). Omówię (w skrócie) drogę naukową (trochę i życiową) Tulczyjewa. Doprowadziła ona do nowych spojrzeń na matematykę w fizyce i, w konsekwencji, nowej matematyki. W geometrii różniczkowej, symplektycznej, multisymplektycznej, rachunku–opisie wariacyjnym...

MSC (2020): 01A99, 53Z05, 49S99

Literatura

- [1] W.M. Tulczyjew, *The origin of variational principles*, Banach Center Publ., 2003, 59, 41–75.
- [2] W.M. Tulczyjew, P. Urbański, *A slow and careful Legendre transformation for singular lagrangians*, Acta Physica Polonica B, 1999, 30, 2909–2978.
- [3] W.M. Tulczyjew, P. Urbański, *Constitutive sets of convex static systems*, Rep. Math. Phys., 2007, 60(2), 199–219.

[4] P. Urbański, Włodzimierz Marek Tulczyjew, *Postępy Fizyki*, 2023, 74(4), 41–43.

Hipoteza Riemanna, ciągi Fareya i model Falicova-Kimballa

Jerzy Jacek Wojtkiewicz

Unwersytet Warszawski

e-mail: wjacek@fuw.edu.pl

Hipoteza Riemanna posiada kilkanaście równoważnych sformułowań. Jedno z nich odwołuje się do *ciągów Fareya* [1, 2]. Z drugiej strony, ciągi Fareya pojawiają się przy opisie stanów podstawowych w jednowymiarowym modelu *Falicova-Kimballa*, używanym w fizyce ciała stałego. W swoim wystąpieniu będę chciał naszkicować pobieżnie powyższe związki oraz postawić problem możliwości udowodnienia hipotezy Riemanna metodami mechaniki statystycznej. Wspomnę również o możliwym związku z kwazikryształami.

MSC (2020): 11-XX, 82-XX

Literatura

- [1] H.M. Edwards, *Riemann Zeta Function*, Dover Publications Inc., Minneola, New York 1974.
- [2] J. Franel, E. Landau, *Les suites de Farey et problème des nombres premiers.*, Gottinger Nachr. 1924, 198–206.

Edukacja matematyczna

AI jako partner w nauczaniu matematyki – wyniki i refleksje z praktyki

Marzena Filipowicz-Chomko

Politechnika Białostocka

e-mail: m.filipowicz@pb.edu.pl

Współautorzy: **Ewa Girejko** (Politechnika Białostocka), **Dorota Mozyrska** (Politechnika Białostocka)

Celem referatu będzie omówienie efektów eksperymentu dydaktycznego przeprowadzonego w ramach projektu Maestro AI, który badał możliwości wykorzystania sztucznej inteligencji w nauczaniu matematyki na poziomie akademickim. W trakcie prezentacji zostaną zaprezentowane obserwacje dotyczące aktywności studentów, jakości interakcji z narzędziem AI oraz sposobu, w jaki ChatGPT wpłynął na proces przyswajania nowych pojęć matematycznych – takich jak liczby zespolone czy zbieżność szeregów liczbowych. Przedstawione zostaną również wyniki ankiet oraz wywiadów przeprowadzonych wśród uczestników zajęć. W wystąpieniu poruszone zostaną zagadnienia związane z rolą nauczyciela w środowisku wspieranym przez sztuczną inteligencję, krytyczne uwagi studentów oraz możliwości i ograniczenia wynikające z praktycznego wdrażania AI w edukacji matematycznej.

MSC (2020): 00A35,97U70

AI jako partner w nauczaniu matematyki – eksperyment z AI na zajęciach

Ewa Girejko

Politechnika Białostocka

e-mail: e.girejko@pb.edu.pl

Współautorzy: **Marzena Filipowicz-Chomko** (Politechnika Białostocka), **Dorota Mozyrska** (Politechnika Białostocka)

Referat poświęcony będzie prezentacji eksperymentu dydaktycznego przeprowadzonego w ramach projektu Maestro AI, którego celem było zbadanie możliwości wykorzystania sztucznej inteligencji w nauczaniu matematyki na poziomie akademickim. Eksperyment przeprowadzono podczas zajęć z algebry liniowej oraz analizy matematycznej dla studentów pierwszego roku kierunku Matematyka Stosowana. W trakcie zajęć wykorzystano narzędzie ChatGPT do wprowadzenia dwóch nowych zagadnień: liczb zespolonych w postaci algebraicznej oraz zbieżności szeregów liczbowych. Sztuczna inteligencja została włączona w różne etapy procesu dydaktycznego – od formułowania celów i motywowania studentów, przez wspólne eksplorowanie definicji i przykładów, aż po rozwiązywanie zadań oraz podsumowanie materiału. W referacie zostaną przedstawione scenariusze zajęć z wyraźnym uwzględnieniem roli ChatGPT jako narzędzia wspomagającego zarówno nauczyciela, jak i studentów.

MSC (2020): 00A35, 97U70

Czy ułatwienie może być przeszkodą?

Grażyna Horbaczewska

Uniwersytet Łódzki

e-mail: grazyna.horbaczewska@wmii.uni.lodz.pl

Współautorzy: **Ryszard Pawlak** (Uniwersytet Łódzki)

Refleksja nad celami nauczania matematyki i nad wzbudzaniem u uczniów motywacji do osiągania tych celów.

Omówienie przeszkód epistemologicznych i dydaktycznych, do których niekiedy prowadzi używanie współczesnych narzędzi informatycznych umożliwiających błyskawiczne rozwiązywanie zadań.

MSC (2020): 97C70, 97D30, 97P80, 97U70

Literatura

- [1] M. Bieńkowska, *Wpływ edukacji matematycznej na rozwój osobisty ucznia - refleksje nauczyciela matematyki*, Skrypty belfra nr 36 DODN we Wrocławiu.
- [2] W. Huang, S.M. Sutherland, *The Impact of Technology Artifacts on Mathematics Classroom Discourse*, Digit. Exp. Math. Educ., 2022, 8, 317–351.
- [3] W. McGalliard, S. Otten, *AI Responses to Challenging Problems and Educator Responses to AI Availability*. Digit. Exp. Math. Educ. 2024.
- [4] M. Niss, *Goals of Mathematics Teaching*, in: Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (eds.) *International Handbooks of Education*, vol 4. Springer, Dordrecht, 1996.
- [5] O.A.G. Opešemowo, M. Ndlovu, *Artificial intelligence in mathematics education: The good, the bad, and the ugly*, Journal of Pedagogical Research, 2024, 8(3), 333-346.
- [6] A. Sierpińska, *Pojęcie przeszkody epistemologicznej w nauczaniu matematyki* Roczniki PTM Seria V: Dydaktyka Matematyki, 1987, 8.

- [7] C. Webel, S. Otten, *Teaching in a World with PhotoMath*, The Mathematics Teacher, 2016, 109(5), 369–373.

Przykłady współpracy Politechniki Świętokrzyskiej z nauczycielami matematyki

Andrzej Lenarcik

Politechnika Świętokrzyska

e-mail: andrzej.lenarcik@gmail.com

Współautorzy: **Danuta Pyrek** (Centrum Korpusu Kadetów im. płk. Łukasza Cieplińskiego)

Przemiany społeczno-polityczne w Polsce po roku 1989 dały impuls uczelniom wyższym do zmian w systemie i metodach nauczania. Szczególnie kreatywną postacią na Politechnice Świętokrzyskiej był śp. dr Zdzisław Piasta (1952-2020). Jemu zawdzięczamy popularyzację (pod koniec lat dziewięćdziesiątych) metod zarządzania Deminga (1900-1993) [1]. Okazało się, że wiele cennych wskazówek (podobnych do zasad Deminga) można odnaleźć w twórczości o. Jacka Woronieckiego (1878-1949) [2]. Obaj akcentowali rolę człowieka w zarządzaniu. Deming szczególnie wskazywał na znaczenie komunikacji międzyludzkiej w poprawie jakości procesów.

Zniesienie (jeszcze w latach osiemdziesiątych) obowiązku zdawania egzaminu maturalnego z matematyki zaczęło skutkować (w latach dziewięćdziesiątych) pogorszeniem umiejętności matematycznych młodzieży rozpoczynającej studia. Aplikując zasady Deminga, pracownicy Politechniki Świętokrzyskiej szukali kontaktu z nauczycielami w szkołach, żeby wspólnie zastanowić się nad problemem. Wtedy doszło do spotkania obu autorów. Drugi autor reprezentował wówczas Samorządowy Ośrodek Doradztwa Metodycznego i Doskonalenia Nauczycieli w Kielcach. Początkowo współpraca dotyczyła organizowania kółek matematycznych. Od roku 2003 rozpoczęły się na Uczelni cykliczne spotkania pod nazwą „Seminarium Jakości Kształcenia Matematycznego”. W różnych okresach uczestniczyło w spotkaniach około dwustu nauczycieli, również spoza województwa świętokrzyskiego.

Deming kazał szukać wskazówek do ulepszania procesów w analizie przypadków szczególnych. Dlatego z jednej strony prace Seminarium skupiały się na pracy z młodzieżą uzdolnioną (organizowanie konkursów matematycznych), z drugiej strony ważnym tematem była pomoc młodzieży mającej trudności

z matematyką. W roku 2011, dwa konkursy powiatowe organizowane w Ostrowcu Świętokrzyskim i Włoszczowie, zostały przekształcone, zgodnie z pomysłem zaproponowanym przez drugiego autora, w konkurs wojewódzki o nazwie Świętokrzyski Matematyczny Maraton Maturalny. Z definicji konkurs miał być wsparciem dla młodzieży przygotowującej się do przywróconej obowiązkowej matury z matematyki. Konkurs był modyfikowany zgodnie z cyklem Deminga: „obserwuj i koryguj”. Stopniowo wprowadzono rywalizację w kilku kategoriach, żeby uniknąć liniowego rankingowania uczestników i dać szansę wyróżnienia się większej liczbie młodzieży i szkół. Od roku 2018 wiele działań Seminarium było skutkiem zmian w podstawie programowej z matematyki. Uczestnicy wypowiadali się w sprawie nowej podstawy, Vademecum Matematycznego oraz Informatora Maturalnego. Pracowano z uczniami ze stwierdzoną dyskalkulią. Pan Prof. Artur Maciąg, Prorektor ds. Studenckich i Dydaktyki Politechniki Świętokrzyskiej, skierował list do Ministerstwa w tej sprawie. Również zaproponował od roku 2022/2023 przekształcenie Maratonu w konkurs ogólnopolski. Od tego roku młodzież rywalizuje w czterech kategoriach: DELTA (poziom podstawowy), GAMMA (pomiędzy podstawą i rozszerzeniem), BETA (rozszerzenie), ALFA (poziom rozszerzony o zwiększonym stopniu trudności). Zanagażowanie uczestników Seminarium, w wojewódzki program pomocy młodzieży z trudnościami matematycznymi, zaowocowało wydaniem zbioru zadań [3].

Podczas referatu przedstawione wyżej zagadnienia zostaną rozwinięte.

MSC (2020): 97B70, 97C70, 97D70, 97U30, 97U40

Literatura

- [1] W.J. Latzko, D.M. Saunders, *Cztery dni z dr. Demingiem – Nowoczesna teoria zarządzania*, WNT, Warszawa 1998.
- [2] A. Lenarcik, M. Stępień, *An application of principles of modern Deming management and sagacious Woroniecki management in the process of teaching mathematics and statistics at the Kielce University of Technology*, in: J. Kot, M. Kotowska-Jelonek, S. Luściński, Zjawiska i Procesy w Erze Cyfryzacji z Perspektywy Zarządzania, Ekonomii i Technologii, Monografie Studia Rozprawy, M146, Politechnika Świętokrzyska, Kielce 2021, s. 237–261.
- [3] D. Pyrek-Noszczyńska, T. Szwed (red.), *GPS w labiryncie matematyki, Zbiór 2956 zadań, poziom podstawowy*, praca zbiorowa, Oficyna Edukacyjna Krzysztof Pazdro,

Wydanie II, poszerzone, Warszawa 2024.

Projekt zespołowy jako jeden z elementów w programie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki

Anna Loranty

Uniwersytet Łódzki

e-mail: anna.loranty@wmii.uni.lodz.pl

W roku 2019 na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego był realizowany projekt *Modelowe kształcenie przyszłych nauczycieli przedmiotów matematyczno-przyrodniczych w Uniwersytecie Łódzkim, Zadanie 3. Modyfikacja i realizacja programu kształcenia na specjalności nauczycielskiej w zakresie nauczania matematyki na kierunku Matematyka na Wydziale Matematyki i Informatyki UŁ – studia I i II st.* Projekt ten był realizowany w ramach Programu Operacyjnego Wiedza Edukacja Rozwój. W ramach działań zostały opracowane między innymi dwa programy kształcenia na kierunku matematyka na specjalnościach nauczycielskich w zakresie nauczania matematyki na studiach pierwszego i drugiego stopnia.

Przygotowane programy uwzględniały zarówno założenia obowiązujących wówczas standardów kształcenia nauczycieli (Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego z dnia 17 stycznia 2012 r. w sprawie standardów kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu nauczyciela, Dz.U. 2012 poz. 131) jak i program wypracowany w projekcie pozakonkursowym Opracowanie modelowych programów kształcenia nauczycieli stanowiącego załącznik 12-b do ogłoszenia Konkurs nr POWR.03.01.00-IP.08-00-PKN/18.

W ramach wprowadzonych wówczas zmian w programach kształcenia zaplanowane zostały między innymi zajęcia pod nazwą “Projekt zespołowy”. Zajęcia te pojawiły się zarówno na studiach pierwszego jak i drugiego stopnia. Ich głównym założeniem było opracowywanie przez studentów projektów edukacyjnych między innymi w postaci zajęć warsztatowych dla uczniów, które miały być realizowane w praktyce. W trakcie referatu zostaną omówione nasze doświadczenia związane z realizacją tego typu zajęć oraz ich wpływ na kształcenie przyszłych nauczycieli.

MSC (2020): 97B50, 97D80

100 lat *Rozrywek matematycznych* inż. Jeleńskiego

Paweł Perekietka

Zakłady Kórnickie

e-mail: redaktor.muma@fzk.pl

W 1925 r. w Poznaniu wydano *Līlāvātī* inż. Szczepana Jeleńskiego. Autor zebrał w tej książce dorobek wieków w dziedzinie tzw. rozrywek matematycznych [4]. W 1928 r. ukazała się część druga pt. *Śladami Pitagorasa*. Te uroczne książki były wznawiane wielokrotnie. Ich niepospolite walory dydaktyczne są ponadczasowe.

MSC (2020): 00A08, 01A70

Literatura

- [1] A.L. Dawidowicz, *Arcydzieła Szczepana Jeleńskiego*, XVIII Szkoła Historii Matematyki „Sławne Dzieła, Matematyczne i Rocznice”, Białystok 2005, 27–32.
- [2] Sz. Jeleński, *Līlāvātī. Rozrywki matematyczne*, Poznań, 1925.
- [3] A. Paszke, *Matematyka w osiedlu szkolnym. Podręcznik systematycznie dobranych rozrywek matematycznych*, Warszawa 1931.
- [4] A.M. Rusiecki, *Nowe książki. Līlāvātī*, Wiedza i Życie, 1926, 1(1), 63–65.
- [5] M. Szurek, *Podroże matematyczne*, Warszawa, 2016.

Nowe podstawy programowe a technologia w nauczaniu matematyki

Piotr Piskorski

Zespół Przedmiotowy ds. Matematyki IBE

Zespół Szkół STO na Bemowie

e-mail: piotr.piskorski@stonabemowie.edu.pl

Wszyscy zdajemy sobie sprawę, że zmiany zachodzące we wszystkich aspektach otaczającego nas świata nie pozostają bez wpływu na mikrokosmos, jakim jest edukacja. Nie dotyczy to tylko Polski – jest to proces o zasięgu globalnym. Wpływ tych zmian na szkołę i nauczanie jest wyraźny, a kierunek w jakim będą przebiegać, w dużej mierze zależy od nas – nauczycieli.

W dyskusjach i pracach nad reformami edukacyjnymi ścierają się dwie postawy: konserwatywna i progresyivistyczna. W debacie publicznej przyjmują

one często skrajne formy. W nauczaniu matematyki podobna dyskusja przebiega łagodniej, jednak i nas ona nie omija. W ostatnich dwudziestu latach zauważalna jest zmiana polegająca na skupianiu się na obliczeniach i algorytmach kosztem rozwijania myślenia matematycznego. Widać to zarówno w egzaminach, jak i w programach nauczania.

Zmiany technologiczne – od powszechności kalkulatorów, przez oprogramowanie komputerowe, aż po aplikacje wykorzystujące sztuczną inteligencję – stwarzają nowe możliwości, ale też wyzwania, z którymi nauczyciele muszą się już teraz mierzyć. Naszym zadaniem jest znalezienie równowagi między chrońieniem podstaw matematyki (niezbędnej sprawności rachunkowej, znajomości algorytmów), a stworzeniem przestrzeni dla rozwoju myślenia matematycznego i pokazania użyteczności tej dziedziny.

Jednym z tematów diskutowanych od 30 lat jest wprowadzenie kalkulatorów do nauczania matematyki i ich wykorzystywanie w szkole. Zbyt wczesne i nieograniczone użycie kalkulatorów prowadzi do osłabienia wyczucia wielkości liczbowych, spadku umiejętności rachunkowych i trudności w szacowaniu. Z drugiej strony – całkowite ich pomijanie jest czasochłonne i może utrudniać zrozumienie sensu wykonywanych działań.

Podczas mojego wystąpienia podejmę próbę określenia warunków sprzyjających skutecznemu wykorzystaniu kalkulatorów w edukacji matematycznej, przedstawię różne strategie ich użycia oraz wskażę pożądane zmiany, które mogą ułatwić korzystanie z tych narzędzi.

MSC (2020): 97U70

Konkursy matematyczne nie tylko dla orłów

Magdalena Sobolewska

VIII Liceum Ogólnokształcące w Białymstoku

e-mail: sobolewska.magdalena@gmail.com

W wystąpieniu przedstawione zostaną różne konkursy, w których mogą uczestniczyć uczniowie szkół średnich. Poza dobrze znanymi, jak Olimpiada Matematyczna lub Ogólnopolska Olimpiada „O Diamentowy Indeks AGH”, opowiem o konkursach drużynowych oraz o konkursach, w których mogą brać udział uczniowie klas humanistycznych. Na zakończenie pokażę, jakie konkursy organizowałam w szkołach, w których pracowałam.

MSC (2020): 97C60, 97U40

O różnych metodach obliczania pola trójkąta

Tomasz Szwed

Akademia Nauk Stosowanych w Raciborzu

e-mail: szwedphd@gmail.com

Podczas wystąpienia opowiem o różnych wzorach na pole trójkąta na płaszczyźnie. Wzory podzielę na dwie kategorie: szkolne i konkursowe. Każdy z omawianych wzorów zostanie uzasadniony i umieszczony w konkretnym kontekście syntetycznym albo analitycznym. Wraz z doбором kolejnych, coraz bardziej zaawansowanych narzędzi matematycznych, przeprowadzę słuchaczy przez rozumowanie matematyczne i sztukę dowodzenia. Uwieńczeniem referatu będą odniesienia do praktyki szkolnej.

MSC (2020): 97G60

Historia matematyki

Matematycy, informatycy, mechanicy-dziekani wydziałów Uniwersytetu Warszawskiego w XX wieku

Stefan Jackowski

Uniwersytet Warszawski

e-mail: stefan.jackowski@uw.edu.pl

Opowiemy historię rozwoju matematyki, informatyki i mechaniki na Uniwersytecie Warszawskim, śledząc poczet przedstawicieli tych dyscyplin pełniących funkcję dziekanów wydziałów, w ramach których były one reprezentowane. Poczet układa się w logiczny ciąg postaci, wywodzących się od ojców-założycieli uniwersyteckiej matematyki po restytucji UW w 1916 roku. Wśród omawianych postaci znajdują się Jan Łukasiewicz, Waław Sierpiński, Stefan Mazurkiewicz, Antoni Przeborski, Andrzej Mostowski, Stanisław Turski, Julian Bonder, Helena Rasiowa, Andrzej Białynicki-Birula, Maria Moszyńska, Jerzy Browkin i Władysław

Turski. Działalność organizacyjna, naukowa i dydaktyczna tych osób znacząco wpłynęła nie tylko na kształt Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW, lecz także badań i kształcenia w całym kraju.

Opracowanie oparte jest na źródłach archiwalnych, znajdujących się głównie w Archiwum UW.

MSC (2020): 01A60, 01A70, 01A73

Istota historii matematyki a *Słownik biograficzny matematyków polskich* wydany w 2024 roku przez PAU

Jan Koronński

Politechnika Krakowska

e-mail: jan.koronski@pk.edu.pl

Istotą historii matematyki z jednej strony jest przede wszystkim matematyka, którą współcześnie można określić jako zbiór definicji, twierdzeń (w tym hipotez i pojęć pierwotnych) oraz dowodów twierdzeń (przeprowadzanych zgodnie z regułami logiki matematycznej) i wzajemnych relacji, jakie zachodzą pomiędzy wyżej wyszczególnionymi kategoriami matematycznymi [2, 3]. Z drugiej strony wymienione powyżej elementy każdej teorii matematycznej (tj. definicje, twierdzenia i ich dowody) ktoś i kiedyś sformułował, a zatem drugą składową istoty historii matematyki jest właśnie historia, która obejmuje nie tylko historię rozwoju pojęć i teorii matematycznych, ale także obejmuje autorów konkretnych definicji, twierdzeń i ich dowodów. Stąd też w zakres tematyczny historii matematyki wchodzi różnego rodzaju biografie matematyków. W poprzednim 2024 roku powstał zbiór 1710 biogramów encyklopedycznych pt. *Słownik biograficzny matematyków polskich* [1] pod redakcją naukową prof. dr. hab. Romana Dudy wydany przez Polską Akademię Umiejętności w Krakowie. Słownik ten powstał w ramach grantu badawczego nr 0333/NPRH7/H11/86/2018 i został sfinansowany w ramach programu Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego pod nazwą *Narodowy Program Rozwoju Humanistyki* w latach 2018-2025. Cały program obejmuje osiem słowników biograficznych uczonych polskich związanych z archeologią, astronomią, botaniką, chemią, fizyką, geologią, matematyką i pedagogiką. W 2015 roku Zarząd i Rada PAU postanowiła wszcząć działania w celu opracowania i publikacji kolejnych słowników uczonych polskich w kilkudziesięciu dalszych dziedzinach nauki.

Dla wszystkich słowników przyjęto pewne ogólne założenia wstępne, tak aby ujednolicić formę obecnej serii słowników. Naczelnym założeniem było, aby słowniki obejmowały maksymalnie dużą grupę (niemal wszystkich) uczonych polskich od początku dziejów Polski do współczesności, którzy mieli wkład w poszczególnych dziedzinach nauki poprzez publikacje, książki różnego typu, wykłady, kształcenie na poziomie wyższym, działania organizacyjne i inne działania znaczące dla rozwoju danej dziedziny nauki. Kolejnym założeniem było, aby biogramy były zwięzłe i treściwe bez mniej istotnych szczegółów, takich jak: szczegóły rodzinne, imiona rodziców, rodzeństwa, dzieci. Ponadto zwykle pomijane były dokładne liczby magistrów, doktorantów i publikacji. Nie wymieniano również mniej ważnych (zwykłych) odznaczeń, nagród i wyróżnień. Główny nacisk kładziono na istotne osiągnięcia i zasługi opisywanych uczonych oraz na ich oddźwięk w Polsce i poza jej granicami. Szczególnie w *Słowniku biograficznym matematyków polskich* [1] proporcjonalnie do zasług i osiągnięć poszczególnych uczonych, przydzielano stosowną objętość ich biogramów. Niekiedy w słowniku znajdują się tylko dane sygnalizujące poszczególnych uczonych, bez żadnych szczegółów, gdyż do nich nie udało się jeszcze dotrzeć. Zatem w wielu miejscach słownik wymaga uzupełnienia a niekiedy z pewnością także korekty. Dostrzeżone błędy, usterki i braki proszę sygnalizować na adres: jan.koronski@pk.edu.pl oraz dla pewności: jan.koronski@gmail.com. W czasie trwania referatu omówimy więcej szczegółów dotyczących *Słownika biograficznego matematyków polskich* [1].

Zuważmy jeszcze powołując się na obowiązujący wykaz dyscyplin naukowych, że historia matematyki wchodzi w zakres tematyczny dyscypliny matematyka (jest interdyscyplinarną dziedziną wiedzy na pograniczu matematyki i historii), co bez wątplenia wynika z właściwej refleksji merytorycznej zawodowych matematyków, gdy wnikną w powyżej wyekspikowaną istotę historii matematyki. Fakt ten jest także potwierdzony w Mathematics Subject Classification 2020 [4] poprzez uwzględnienie historii matematyki w wykazie dziedzin matematycznych.

MSC (2020): 00A05, 00A20, 00A35, 01A70, 01A73

Literatura

- [1] R. Duda (red. nauk.), *Słownik biograficzny matematyków polskich*, Wydawnictwo PAU, Kraków, 2024.
- [2] J. Koroński, *Istota i znaczenie krakowianów Tadeusza Banachiewicza*, *Annales Astronomiae Novae*, 2023, 4, 199–214.

- [3] J. Koroński, *Liczba π – perła w koronie Królowej nauk*, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis – Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia, 2023, 15, 83–93.
- [4] *Mathematics Subject Classification*, American Mathematical Society, 2020.

Wybitne osobowości matematyczne w osiemdziesięcioleciu Politechniki Krakowskiej

Jan Koroński

Politechnika Krakowska

e-mail: jan.koronski@pk.edu.pl

Dzieje matematyki w Politechnice Krakowskiej [5] związane są ze znakomitymi matematykami polskimi [2]. Wydziały Politechniczne Akademii Górniczej (od 1949 AGH) zostały przekształcone w samodzielną uczelnię nazwaną Politechniką Krakowską z przyjętą stosownym dekretem Rady Ministrów (z dnia 07.07.1954 r.) wsteczną datą założenia od 1 lipca 1945 roku. Wydziały te, tzn. Wydział Architektury, Wydział Inżynierii i Wydział Komunikacji od początku posiadały pełną autonomię, wyrażającą się oddzielnym zarządzaniem i administracją, osobnym budżetem oraz senatem, którego przewodniczącym był odrębny prorektor.

Minister Oświaty powołał 16 katedr na tych wydziałach [3, 5] w tym trzy katedry matematyczne. Na początku z tymi katedrami byli związani wybitni i znani [1] matematycy polscy: Mirosław Krzyżański (1907-1965), Władysław Nikliborc (1899-1948), Franciszek Leja (1885-1979), Adam Bielecki (1910-2003), Otto Nikodym (1889-1974), Jacek Szarski (1921-1980), Antoni Plamitzer (1889-1954) i Zdzisław Siedmiograj (1906-1962). Wymienieni tu matematycy przez pewien czas kierowali wymienionymi wyżej katedrami matematycznymi i katedrą geometrii wykreślnej. W 1954 roku Krzyżański został mianowany profesorem zwyczajnym Katedry Matematyki Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Krakowskiej [1, 4]. Kolejnymi po Krzyżańskim (w 1955 roku przeszedł na UJ) kierownikami Katedry Matematyki w PK byli zast. prof. Zdzisław Siedmiograj (1906-1962), prof. dr inż. Aleksander Lisowski (1919-1976) i doc. dr inż. Janusz Murzewski (1928-2020). Istotnymi wydarzeniami mającymi wpływ na historię matematyki w PK było uzyskanie w latach sześćdziesiątych XX wieku habilitacji przez kilkoro matematyków pracujących w PK [1, 4]. Habilitacje wtedy uzyskali: dr Feliks Barański (UAM, 07.05.1963, prof.), dr Genowefa Majcher (PW,

20.04.1966, doc.), dr Irena Łojczyk-Królikiewicz (PW, 04.03.1968, prof. PK) i dr Jan Bochenek (UJ, 19.06.1969, prof.).

Wszystkie z wymienionych tu osób potem odegrały istotne role i wypełniały bardzo ważne funkcje w utworzonym niebawem w 1970 roku Instytucie Matematyki PK, wywierając zasadniczy wpływ na rozwój kadr naukowych i dydaktycznych w zakresie matematyki w PK. W strukturze instytutowej kolejne habilitacje uzyskały następujące osoby: dr Teresa Winiarska (PW, 20.04.1989, prof. PK), dr Ludwik Byszewski (PW, 26.04.2000, prof. PK), dr Zbigniew Jelonek (PW, 27.10.2000, prof. PK), dr inż. Anna Kumaniecka (PK, 04.02.2009, dr hab. inż.), dr Piotr Kot (UJ, 31.10.2013, przeszedł na AGH w 2017 r., prof. AGH) i dr Jan Koroński (PAN, 08.03.2018, prof. PK). W 2019 roku, w PK powrócono do struktury wydziałów złożonych z katedr likwidując instytuty i wchodzące w ich skład zakłady.

W historii Instytutu Matematyki Politechniki Krakowskiej przewinęło się wielu wybitnych matematyków, których sylwetki tu przybliżymy (biogramy encyklopedyczne prawie wszystkich zmarłych matematyków z PK i wybitniejszych geometrów wykreślonych z PK można znaleźć w [2]). W Politechnice Krakowskiej także poza Instytutem Matematyki znajdziemy znaczące sylwetki innych matematyków [2], jak np. prof. Józef Nizioł dwukrotny Rektor PK, czy też dr hab. Andrzej Karafiat (1947-2020) matematyk z byłego Instytutu Informatyki Wydziału Fizyki, Matematyki i Informatyki PK, a także od wielu lat aktywny w USA prof. Leszek Demkowicz (matematyk i inżynier) [1]. Dodajmy tu, że w PK pracowali następujący matematycy - profesorowie zagraniczni: prof. Serhij Lawreniuk (zmarł we Lwowie w 2008 r.), prof. Anatolij Plichko (emeryt), prof. Orest Artemowych (od 2022 w Politechnice Śląskiej) oraz pracują nadal prof. Anatolij Prykarpatski, prof. Władimir Mituszew, a także profesorowie PK: Ihor Mykytyuk i Yosyf Piskozub.

MSC (2020): 01A60, 01A70, 01A73

Literatura

- [1] Archiwum Politechniki Krakowskiej, *Teczki osobowe matematyków związanych z PK*.
- [2] R. Duda (red. nauk.), *Słownik biograficzny matematyków polskich*, Polska Akademia Umiejętności, Kraków, 2024.
- [3] J. Koroński, *Królowa nauk dla przyszłych inżynierów*, Nasza Politechnika, 2012, 4, 5–10.

- [4] J. Koroński, *Mirostaw Krzyżański (1907-1965) i jego monografia z równań różniczkowych cząstkowych*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, 2013, R.58(4), 7–28.
- [5] J. Koroński, *Zarys dziejów matematyki w siedemdziesięcioleciu Politechniki Krakowskiej*, Prace Komisji Historii Nauki PAU, 2015, XIV, 99–115.

Elementy historii matematyki w szkole średniej na przykładzie zastosowania reguły Pappusa-Guldina do obliczania pól i objętości brył obrotowych

Bronisław Pabich

XX LO w Krakowie

PCKZiU w Wieliczce

e-mail: bronek.pabich@gmail.com

Ucząc stereometrii w ostatnich klasach szkół średnich odwołujemy się często do wzorów na pola i objętości walca, stożka i kuli. Bryły te powstają w wyniku obracania się odpowiednio prostokąta, trójkąta równoramiennego i koła wokół osi symetrii tych figur. Jednak, jeśli obrócimy prostokąt wokół osi zawierającej bok b prostokąta o podstawie długości a wówczas objętość i pole całkowite uzyskanego walca są równe odpowiednio:

$$V = \pi * a^2 * b \quad \text{oraz} \quad S = 2 * \pi * a^2 + 2 * \pi * a * b.$$

Po odpowiednim przekształceniu tych wzorów można uzyskać nieco inne ich postacie, które wyrażają objętość i pole uzyskanego walca poprzez odległość $a/2$ środka ciężkości prostokąta od osi obrotu oraz odpowiednio pola ab prostokąta i jego obwodu $2a + 2b$. Okazuje się, że taki sposób wyznaczania objętości i pól brył obrotowych powstających przez obracanie figury płaskiej wokół osi nie przecinającej tej figury można zastosować dla każdej bryły obrotowej pod warunkiem, że znamy środek ciężkości figury płaskiej, z której tworzymy bryłę obrotową.

Regułę tę odkrył w IV wieku n.e. Pappus z Aleksandrii (290-350) a w XVI/XVIII wieku rozpowszechnił ją szwajcarski zakonnik Paul Habakkuk Guldin (1577-1643). Poznanie tej reguły może uatrakcyjnić lekcje rachunkowe ze stereometrii. Korzystając z tej reguły można wyznaczyć również środek ciężkości figury płaskiej. Na przykład znając wzór na objętość i pole kuli można

wyznaczyć środek ciężkości półkola, z którego w wyniku obrotu wokół średnicy powstała kula.

MSC (2020): 01A16, 01A45

Literatura

- [1] Bronisław Pabich, *Reguła Guldina*, Świat Matematyki nr 51, 2018, 5, 2–6.
- [2] Paul Guldin in Schülerlexikon, Lernhelfer, <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematikabitur/artikel/paul-guldin>.

Objętość kuli wyznaczona przez Chińczyków w VIII wieku n.e. jako przykład wprowadzania elementów historii matematyki w szkole średniej

Bronisław Pabich

XX LO w Krakowie

PCKZiU w Wieliczce

e-mail: bronek.pabich@gmail.com

Uczniowie szkół średnich poznają na lekcjach stereometrii wzór na objętość kuli, lecz nie są zaznajamiani z metodami jej wyznaczania. Najbardziej popularną metodą jest pochodząca od Archimedesesa, wykorzystująca jego zasadę zwaną obecnie zasadą Cavalieriego, gdyż została spopularyzowana przez włoskiego matematyka, jezuitę Bonawenturę Cavalieriego w XVII wieku. Zasada ta odnosi się zarówno do figur płaskich jak i przestrzennych. Głosi ona, że jeżeli dwie figury płaskie przetniemy prostymi równoległymi do siebie i wszystkie odcinki utworzone z przecięcia ich z tymi figurami mają tę samą długość, to figury te mają te same pola. W przestrzeni dwie bryły trójwymiarowe przecinamy płaszczyznami równoległymi do siebie. Jeśli przekroje tych brył utworzone przez wszystkie te płaszczyzny mają to samo pole na tej samej wysokości, to bryły te mają tę samą objętość. Archimedes poszukiwał takiej bryły przestrzennej, która po przecięciu płaszczyzną poziomą na wysokości h dawała przekrój kuli na tej samej wysokości o takim samym polu. Odkrył on, że wszystkie przekroje kuli o promieniu R na wysokości $h \leq 2R$ oraz przekroje obszarów zawartych między walcem o promieniu podstawy R i wysokości $2R$ a stożkami wpisanymi w niego są takie same na wysokości h . Fakt ten miał miejsce w III wieku przed naszą erą.

Z matematyką chińską było nieco inaczej. W wyniku oczywistych barier językowych i geograficznych, rozwijała się ona niezależnie w podobny sposób, jak matematyka starożytnego świata śródziemnomorskiego. Jednak wyznaczenie objętości kuli było dla Chińczyków niedostępne z powodu nieznamienia zasady Archimedesesa - Cavalieriego. Pierwsze próby dokonywał w V w. n.e. Liu Hui. Odkrył on, że iloraz pola koła do pola kwadratu, w który został on wpisany jest równy ilorazowi objętości walca do sześcianu o tej samej krawędzi co wysokość walca. Jednak nie potrafił odnieść swego odkrycia do wyznaczenia objętości tej kuli.

Dopiero w VIII w. n.e. Zu Chongzi wraz z synem Zu Seng wykorzystali zasadę Archimedesesa-Cavalieriego i wyznaczyli dokładnie objętość kuli. Skorzystali z wiedzy Liu Hui i utworzyli szczególną bryłę zwaną „mouhenfanggai” co w tłumaczeniu z języka chińskiego oznacza „podwójny parasol”. Metoda ta jest bardzo intrygująca i pomysłowa, ale co najważniejsze – skuteczna. Na wykładzie będzie przedstawiony sposób tworzenia tej bryły wraz z prezentacją odpowiednich modeli oraz dokładny opis wyznaczenia przez Chińczyków objętości kuli.

MSC (2020): 01A05, 01A25, 01A45

Literatura

- [1] T. Kiang, *An old Chinese way of finding the volume of a sphere*, The Mathematical Gazette 56 Nr 396, 88–91.
- [2] L. Lay-Yong, S. Kangsheng, *The Chinese Concept of Cavalieri's Principle and Its Applications*, Historia Mathematica, 1985, 12, 219–228.
- [3] E. McCaughan, *Mouhefanggai*, 2011, <https://nrich.maths.org/1412>.
- [4] B. Pabich, *Chiński sposób obliczania objętości kuli*, Matematyka Czasopismo Dla Nauczycieli, 2018, 3, 52–53.
- [5] B. Pabich, *Objętość kuli po chińsku*, Świat Matematyki nr 66, 2021, 5, 13–15.
- [6] D. Wagner, *Liu Hui and Tsu Keng-chih on the volume of a sphere*, Chinese science,

1978, 3, 59–79.

150 rocznica zakupu rękopisów Hoene-Wrońskiego przez Jana Działyńskiego, właściciela Biblioteki Kórnickiej

Paweł Perekietka

Zakłady Kórnickie

e-mail: redaktor.muma@fzk.pl

Jan Działyński, właściciel Biblioteki Kórnickiej, interesował się matematyczną spuścizną po Hoene-Wrońskim. W 1871 r. Towarzystwo Nauk Ścisłych, założone z inicjatywy Działyńskiego, ogłosiło konkurs nt. *Ocena prac matematycznych Hoene-Wrońskiego*. Konkurs nie przyniósł gruntownego opracowania tematu [1].

W 1875 r. hr. Działyński zakupił rękopisy matematyczno-fizyczne Wrońskiego. Rękopisami zainteresował się Samuel Dickstein. W 1886 r. odwiedził Bibliotekę Kórnicką [2]. Rękopisy wypożyczono Akademii Umiejętności w Krakowie. Zbadania prac Wrońskiego podjął się Wydział Matematyczno-Przyrodniczy Akademii. Pomysł opracowania i wydania dzieł nie został jednak zrealizowany [5].

W 1896 r. nakładem Akademii Umiejętności wydano opracowanie Dicksteina, w którym skatalogował i opisał zbiór dzieł drukowanych i rękopisów Wrońskiego ze zbioru kórnickiego [4]. O różnorodności zagadnień obecnych w rękopisach świadczy to, że są przydzielone do 15 z 23 działów matematyki ówczesnej klasyfikacji międzynarodowej [6]. Również w 1896 r. ukazała się monografia Dicksteina obejmująca biografię Hoene-Wrońskiego i bibliografię jego prac [3]. Do Biblioteki Kórnickiej rękopisy Hoene-Wrońskiego wróciły w 1928 r. W Archiwum Biblioteki Kórnickiej (sygn. AB 072) znajduje się korespondencja dotycząca Hoene-Wrońskiego i zbioru jego dzieł zgromadzonych w Bibliotece.

MSC (2020): 01A55, 01A70

Literatura

- [1] J. Dianni, *Towarzystwo Nauk Ścisłych w Paryżu*, Kwartalnik Historii Nauki i Techniki, 1972, 1, 45–58.
- [2] S. Dickstein, *Spuścizna naukowa po Hoene-Wrońskim*, Wszechświat, 1887, 1, 10.
- [3] S. Dickstein, *Hoene Wroński. Jego życie i prace*, Kraków, 1896.

- [4] S. Dickstein, *Katalog dzieł i rękopisów Hoene-Wrońskiego*, Kraków, 1896.
- [5] Z. Krajewska, *Wronsciana i norwidiana kórnickie w korespondencji Zenona Przesmyckiego*, Pamiętnik Biblioteki Kórnickiej, 1973, 11, 191–325.
- [6] *Index du Répertoire bibliographique des sciences mathématiques*, 1893.

Historia nazwy *przestrzeń polska*

Małgorzata Terepeta

Politechnika Łódzka

e-mail: malgorzata.terepeta@p.lodz.pl

Po raz pierwszy termin *przestrzeń polska* został użyty w 1949 roku przez Rogera Godementa, członka grupy Nicolas Bourbaki [2]. Nazwą tą Godement chciał uhonorować grupę polskich matematyków, którzy badali te przestrzenie topologiczne. Do grupy tej należeli: Waław Sierpiński, Kazimierz Kuratowski, Alfred Tarski, Stefan Mazurkiewicz i Zygmunt Janiszewski. W literaturze matematycznej termin ten pojawił się dopiero w 1958 roku w książce Nicolasa Bourbaki *Topologie générale* [1].

Przestrzeń polska to ośrodkowa metryzowalna w sposób zupełny przestrzeń topologiczna, tzn. przestrzeń homeomorficzna z zupełną przestrzenią metryczną, która ma przeliczalny, gęsty podzbiór. Obecnie jest to podstawowe pojęcie w opisowej teorii mnogości, używane także w teorii miary, teorii prawdopodobieństwa, w badaniach struktur borelowskich i zbiorów analitycznych.

MSC (2020): 01A60, 01A70, 01A73

Literatura

- [1] N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chapitre 9: *Utilisation des nombres réels en topologie générale*, II wyd., Hermann, Paris 1958.
- [2] R. Godement, *Analyse mathématique IV. Intégration et théorie spectrale, analyse harmonique, le jardin des délices modulaires*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 2003.

- [3] L. Maligranda, M. Terepeta, *75 lat nazwy „przestrzeń polska”*, *Antiquitates Mathematicae*, 2024, 18, 3–24.

Kontynuacja riemannowskich badań podstaw matematyki w polskiej szkole matematycznej

Wiesław Wójcik

Uniwersytet Jana Długosza w Częstochowie

e-mail: w.wojcik@ujd.edu.pl

Jedną z cech określającą polską szkołę matematyczną jest nawiązanie do programu badań podstaw nauki Bernarda Riemanna (1826-1866). Jest on znany przede wszystkim z przełomowych odkryć w zakresie nauk matematyczno-przyrodniczych. W tej prezentacji chciałbym pokazać mniej znany, a sformułowany przez niego, projekt rozwoju nauki. Mamy dwie najważniejsze prace Riemanna dotyczące badania podstaw: *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (1854) oraz *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grosse* (1851). Pod pojęciem Grundlagen Riemann miał na myśli nie tyle ustalenie aksjomatów dla teorii matematycznych i ustalanie ich niezależności czy niesprzeczności, lecz „pogłębianie podstaw”, w tym zrozumienie przestrzeni i podstawowych pojęć geometrycznych. Chodziło o budowanie podstawy pojęciowej dla nowych matematycznych i fizycznych teorii. Do tych pojęć można zaliczyć na przykład: n -wymiarową rozmaitość, metrykę i krzywiznę (w ramach środków geometrii różniczkowej). Wspomnę również o badaniach związanych ze zbiorami jednoznaczności (zbiory U). Są to takie zbiory, że zbieżność szeregu Fouriera poza nim do zera prowadzi do zerowania się współczynników. Te zbiory prowadzą do badania wewnętrznej natury obiektów matematycznych, a także pokazują niespodziewane związki między analizą matematyczną, teorią miary, teorią mnogości, analizą funkcjonalną oraz teorią liczb.

Opracowanie bazuje na wyżej wymienionych dwóch pracach Riemanna oraz wybranych opracowaniach i materiałach źródłowych dotyczących polskiej szkoły matematycznej.

MSC (2020): 01-02, 03-03, 01A55, 01A60, 01A72

Matematyczna teoria sterowania

Sterowalność dodatnich układów na skalach czasowych

Zbigniew Bartosiewicz

Politechnika Białostocka

e-mail: z.bartosiewicz@pb.edu.pl

Rozważamy liniowy układ sterowania na skali czasowej $\mathbb{T}$ zadany przez równanie $x^\Delta = Ax + Bu$, gdzie x^Δ jest delta-pochodną funkcji x , opisującej stan układu. Dla skali czasowej $\mathbb{R}$ równanie sprowadza się do równania różniczkowego $\dot{x} = Ax + Bu$, a dla skali $\mathbb{Z}$ otrzymujemy równanie różnicowe $\Delta x(k) := x(k+1) - x(k) = Ax(k) + B(k)$. Układ jest dodatni, jeśli $x(t)$ ma wszystkie składowe nieujemne dla $t > 0$, nieujemnego stanu początkowego $x(0)$ i nieujemnego sterowania u . Dodatnia sterowalność (z zera) takiego układu oznacza, że zbiór osiągalny z zera pokrywa się z nieujemnym stożkiem w przestrzeni stanów, natomiast istotna dodatnia sterowalność jest słabszą własnością polegającą na tym, że zbiór osiągalny z zera jest gęsty w stożku nieujemnym.

Dodatnia sterowalność jest bardzo restrykcyjną własnością dla układów z czasem ciągłym (na skali $\mathbb{R}$) oraz dużo mniej wymagającą na skali $\mathbb{Z}$. Podamy warunek konieczny i wystarczający na dodatnią sterowalność układu na dowolnej skali czasowej. Będzie on wyrażony przy pomocy pewnego subgramianu związanego z układem sterowania. Z tego warunku można otrzymać skrajnie różne charakteryzacje dodatniej sterowalności dla czasu ciągłego i czasu dyskretnego.

Istotna dodatnia sterowalność również ma różne charakteryzacje na skali $\mathbb{R}$ i na skali $\mathbb{Z}$. Podobnie jak poprzednio, odpowiednio zdefiniowany subgramian umożliwi jednolity opis tej własności na dowolnej skali czasowej. Pokażemy, jak z tego opisu można wygenerować charakteryzacje istotnej dodatniej sterowalności dla układów na konkretnych skalach czasowych.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr W/WI/2/2023 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 93C28, 34N05

Niestandardowe funkcje wykładnicze na skalach czasowych i ich zastosowania

Jan Leszek Cieśliński

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: j.cieslinskia@uwb.edu.pl

Skalą czasową nazywamy dziedzinę (zbiór domknięty), na której określamy funkcje oraz ich pochodne czy całki, a także układy dynamiczne. Przypadkami skrajnymi są równania różniczkowe (przypadek ciągły) oraz różnicowe (przypadek czysto dyskretny). Rozważanie dowolnej skali czasowej pozwala więc na jednolite traktowanie przypadku ciągłego i dyskretnego, q -analogów oraz wszystkich przypadków pośrednich, w szczególności fraktalnych.

Mówiąc o funkcji wykładniczej na skali czasowej zwykle ma się na myśli funkcję wykładniczą delta, rzadziej stosowana jest funkcja wykładnicza nabla (obie te funkcje mają też swoje dobrze znane q -analogi). Niestety, te standardowe funkcje wykładnicze na ogół nie odwzorowują podzbiorów osi urojonej w okrąg, co przekłada się na niezbyt dobre własności powiązanych z nimi funkcji trygonometrycznych na skalach czasowych. Zazwyczaj nie są one ani okresowe, ani nawet ograniczone.

W referacie zaprezentowane są inne typy funkcji wykładniczych, prowadzących do funkcji trygonometrycznych o znacznie lepszych własnościach (np. suma kwadratów sinusa i cosinusa wynosi jeden), związane z symetrycznymi przybliżeniami Padégo [3]. Najprostszym, ale zarazem najważniejszym, jest przypadek przypominający transformatę Cayley'a [2, 4].

Ważną motywacją tego podejścia jest powiązanie układów dynamicznych na dyskretnych skalach czasowych z metodami numerycznymi. W tym kontekście równania pierwszego rzędu typu delta i nabla odpowiadają metodom Eulera (otwartej i zamkniętej), a inne schematy numeryczne prowadzą do innych równań na skalach czasowych, których rozwiązaniami są inne typy funkcji wykładniczych.

W przypadku ciągłym ściśle rozwiązania różnych równań dość często zbudowane są z funkcji wykładniczych czy trygonometrycznych. W referacie podane zostaną analogiczne przykłady ścisłych rozwiązań dla równań na skalach czasowych, poczynając od równań liniowych o stałych współczynnikach, jak oscylator harmoniczny.

Ciekawym przypadkiem są całkowalne równania różniczkowe cząstkowe, gdzie rozwiązania solitonowe wyrażają się poprzez funkcje wykładnicze. Moż-

na by się spodziewać, że analogi tych równań na skalach czasowych także będą posiadać tego typu rozwiązania. Potwierdza to przykład równania sinusa-Gordona, związanego z powierzchniami pseudosferycznymi [1, 5]. Co ciekawe, w zagadnieniu tym przydaje się zarówno funkcja wykładnicza delta (na etapie konstrukcji tzw. pary Laxa), jak i funkcja wykładnicza Cayley’a (przez którą wyraża się rozwiązanie solitonowe).

MSC (2020): 33B10, 34N05, 35R07

Literatura

- [1] J.L. Cieśliński, *Pseudospherical surfaces on time scales: A geometric definition and the spectral approach*, J. Phys. A: Math. Theor., 2007, 40, 12525–12538.
- [2] J.L. Cieśliński, *Improved q -exponential and q -trigonometric functions*, Appl. Math. Lett., 2011, 24, 2110–2114.
- [3] J.L. Cieśliński, *Some implications of a new approach to exponential functions on time scales*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Suppl.), 2011, 302–311
- [4] J.L. Cieśliński, *New definitions of exponential, hyperbolic and trigonometric functions on time scales*, J. Math. Anal. Appl., 2012, 388, 8–22.
- [5] J.L. Cieśliński, T. Nikiciuk, K. Waśkiewicz, *The sine-Gordon equation on time scales*, J. Math. Anal. Appl., 2015, 423, 1219–1230.

Równania momentów dla rozwiązań homograficznego równania różnicowego z losowymi współczynnikami

Tomasz Czyżycki

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: tomczyk@math.uwb.edu.pl

Celem referatu jest zaprezentowanie metody badania stabilności rozwiązań homograficznego równania różnicowego z losowymi współczynnikami, zależnymi od łańcucha Markowa. Ponieważ rozwiązania takiego równania są zmiennymi losowymi, badanie ich stabilności oprzemy o analizę własności ich momentów pierwszego oraz drugiego rzędu. Momenty te spełniają odpowiednie deterministyczne równania rekurencyjne, wynikające z postaci badanego równania homograficznego z losowymi współczynnikami. Stabilność czy zbieżność rozwiązań tych równań deterministycznych gwarantuje stabilność czy zbieżność momentów, co określa charakter i własności rozwiązań badanego równania.

W referacie zostaną wyprowadzone oraz rozwiązane równania momentów, zbadana ich stabilność a także zaprezentowane będą wyniki symulacji komputerowych, pokazujące zgodność zachowania rozwiązań równań momentów z rozwiązaniami wyjściowego równania.

Wystąpienie zostało przygotowane na podstawie pracy [1].

MSC (2020): 39A30, 39A33, 60J10

Literatura

- [1] T. Czyżycki, I. Dzhalladova, M. Ružičková, *Stability of solutions to a class of homographic difference equations with random coefficient*, Nonlinearity, 2025, ukaże się.
- [2] J. Diblík, I. Dzhalladova, M. Ružičková, *A Dynamical System with Random Parameters as a Mathematical Model of Real Phenomena*, Symmetry, 2019, 11(11), 1338, DOI: [10.3390/sym11111338](https://doi.org/10.3390/sym11111338).

Krzywizna par dynamicznych a punkty sprzężone w równaniach różniczkowych i układach sterowania

Bronisław Jakubczyk

Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk

e-mail: b.jakubczyk@impan.pl

Współautorzy: **Wojciech Kryński** (Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk)

W referacie wprowadzimy pojęcie pary dynamicznej składającej się z pola wektorowego X (dryfu) oraz dystrybucji V rozpiętej przez skończoną liczbę pól wektorowych modelującej zaburzenia (wariacje trajektorii pola X lub kierunków impulsów sterujących). Takie pary opisują w szczególności układy równań różniczkowych 2-go rzędu, w tym równania Eulera-Lagrange’a w fizyce, równania geodezyjnych w geometrii riemannowskiej i finslerowskiej a także klasy regularnych układów sterowania. Zdefiniujemy krzywiznę pary dynamicznej uogólniającą krzywizny występujące w geometrii różniczkowej i w równaniu Jacobiego. Z użyciem tej krzywizny sformułujemy kryteria na istnienie punktów sprzężonych na trajektorii pola X (punktów do których powracają trajektorie zaburzone) i kryteria na ich nieistnienie („ujemna” krzywizna). Wspomnimy o równoważności par dynamicznych i innych niezmienniczych pojęciach z tym

związanych jak pochodna kowariantna i koneksja. Referat oparty jest na artykule [2] a ogólniejsza klasa par dynamicznych i ich niezmienników została opisana w [1].

MSC (2020): 93C10, 34C14, 53A55

Literatura

- [1] B. Jakubczyk, W. Kryński, *Vector fields with distributions and invariants of ODEs*, J. Geom. Mech., 2013, 5(1), 85–129, DOI: [10.3934/jgm.2013.5.85](https://doi.org/10.3934/jgm.2013.5.85).
- [2] B. Jakubczyk, W. Kryński, *Conjugate points of dynamic pairs and control systems*, ESAIM: Control, Optimiz. and Calculus of Variations, 2025, 31, DOI: [10.1051/cocv/2024079](https://doi.org/10.1051/cocv/2024079).

Warunki optymalności wyższych rzędów w geometrii subriemannowskiej

Michał Józwiowski

Uniwersytet Warszawski

e-mail: m.jozwiowski@mimuw.edu.pl

Rozmaitość subriemannowska to rozmaitość riemannowska (M, g) wyposażona w dodatkową strukturę – całkowicie nieholonomiczną dystrybucję liniową (podwiązkę wiązki stycznnej) $D \subset TM$. W tym kontekście, traktując D jako więzy liniowe nałożone na prędkości, można rozważać problem minimalizacji długości/energii krzywej. Jest to naturalne uogólnienie klasycznego problemu geodezyjnego z geometrii riemannowskiej.

Pomimo prostoty sformułowania, problem opisu, a w szczególności regularności, geodezyjnych na rozmaitościach subriemannowskich pozostaje otwarty od ponad 35 lat. Jest tak z powodu występowania tak zwanych *krzywych anormalnych* – specjalnych z punktu widzenia geometrii wiązki D .

Podczas wystąpienia opowiem uzyskanych przeze mnie w rezultatach o geodezyjnych anormalnych [1], a także o pewnych jeszcze niepublikowanych wynikach na temat.

MSC (2020): 53C17, 49K15

Literatura

- [1] M. Józwiowski, *New second-order optimality conditions in sub-Riemannian Geometry*, ESAIM: Control Opr. Calc. Var., 2023, 29, 62.

Długoterminowy wzrost gospodarczy a zachowanie kapitału naturalnego

Marta Kornafel

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

e-mail: marta.kornafel@uek.krakow.pl

Naturalnym pytaniem, które nasuwa się przy próbie modelowania wzrostu gospodarczego z uwzględnieniem konieczności zachowania kapitału naturalnego (rozumianego jako usługi ekosystemowe), jest kwestia integracji celów ekonomicznych z ograniczeniami środowiskowymi oraz dążenie do znalezienia równowagi, w której postęp gospodarczy nie prowadzi do wyczerpania ani degradacji usług ekosystemowych, niezbędnych dla przyszłego dobrobytu.

W referacie zaprezentowany zostanie model wzrostu gospodarczego inspirowany modelem Koopmansa-Cassa, który uwzględnia dynamikę kapitału naturalnego z jego krytycznym progiem i pojemnością środowiskową oraz nakłady inwestycyjne na jego ochronę. Rozważać będziemy maksymalizację użyteczności skumulowanej w czasie życia, której jednym ze składników jest dobrostan wynikający z korzystania z usług ekosystemowych, oraz przeanalizujemy optymalne trajektorie wynikające z modelu. Podejmiemy również problem możliwości podtrzymania długofalowego wzrostu gospodarczego przy jednoczesnym zachowaniu kapitału naturalnego.

MSC (2020): 34H05

Optymalne oszacowania zbieżności energii do zera w nieliniowych układach typu hiperbolicznego w przypadku superliniowego i podliniowego tłumienia

Irena Lasiecka

University of Memphis

e-mail: lasiecka@memphis.edu

Współautorzy: **Ling He** (University of Memphis)

Abstrakcyjny układ nieskończenie wymiarowy typu hiperbolicznego z nieliniowymi wymuszeniami i tłumieniami będzie rozważany. Głównym tematem są słabe rozwiązania oraz zbieżność energii do zera przy występowaniu tłumienia i nieliniowych wymuszeń. Jest znanym faktem, że eksponencjalna zbieżność jest typowa przy liniowych tłumieniach. Okazuje się, że superliniowe tłumienie (intuicyjnie silniejsze od liniowego) prowadzi do paradoksu zmanifestowanym kompromisem zbieżności. Podobna jest sytuacja przy podliniowych tłumieniach. W obu wypadkach otrzymuje się tylko algebraiczne oszacowania na zbieżność. Otrzymane rezultaty są optymalne oraz zilustrowane zastosowaniami w układach nieliniowych fal i nieliniowych płyt.

Metodologia jest oparta na pracach Lasiecka-Tataru [2] oraz Chueshov-Lasiecka [1].

MSC (2020): 35B40, 35B45

Literatura

- [1] I. Chueshov, I. Lasiecka *Long time behavior of second order evolutions equations with nonlinear damping*, Memoires AMS, 2008, 912.
- [2] I. Lasiecka, D. Tataru, *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping*, Differential and Integral Equations, 1993, 6, 507–533.

Analiza stabilności układów niecałkowitego rzędu z operatorami typu Caputo z czasem dyskretnym i opóźnieniami

Dorota Mozyrska

Politechnika Białostocka

e-mail: d.mozyrska@pb.edu.pl

Współautorzy: **Małgorzata Wyrwas** (Politechnika Białostocka)

W tej pracy omówimy badania dotyczące stabilności rozwiązań równań z czasem dyskretnym oraz operatorem niecałkowitego rzędu a także z opóźnieniem. Inspiracją do tego podejścia jest rosnące znaczenie modeli niecałkowitego rzędu

w opisie złożonych systemów, które mają pamięć. Rozważone zostaną układy z operatorami typu Caputo o stałym oraz o zmiennym rzędzie. Dodatkowo do układu wprowadzimy opóźnienie stałe lub rozłożone w czasie. Dodatkowo przedstawione zostaną symulacje numeryczne, które pokażą, jak niecałkowity rząd i opóźnienia wpływają na zachowanie układu, [1].

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr W/WI/2/2023 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 26A33, 34A08

Literatura

- [1] E. Kaslik, S. Sivasundaram, *Analytical and numerical methods for the stability analysis of fractional-order delay differential equations*, J. Comput. Appl. Math., 2011, 236, 2473–2481.

Linearyzacja mechanicznych systemów sterowania

Marcin Nowicki

Politechnika Poznańska

e-mail: marcin.nowicki@put.poznan.pl

Rozważamy problem linearyzacji mechanicznych systemów sterowania zachowującej strukturę mechaniczną układu w dwóch wariantach: mechanicznej linearyzacji przestrzeni stanów oraz mechanicznej linearyzacji przez sprzężenie zwrotne. Sformułujemy warunki konieczne i dostateczne, wyrażone wyłącznie za pomocą obiektów zdefiniowanych na przestrzeni konfiguracyjnej Q , pomimo że przestrzenią stanów układu mechanicznego jest wiązka styczna TQ . W odróżnieniu od klasycznej linearyzacji ogólnych układów nieliniowych, jej mechaniczna wersja umożliwia sformułowanie warunków zarówno dla układów sterowalnych, jak i niesterowalnych.

W naszych badaniach wykorzystujemy narzędzia geometrii różniczkowej, takie jak nawiasy Liego, dystrybucje, pochodne kowariantne oraz tensor krzywizny Riemanna, które posiadają bezpośrednią interpretację mechaniczną. Nasze wyniki ilustrujemy przykładami linearyzowalnych systemów mechanicznych.

Wystąpienie opiera się na wynikach opracowanych wspólnie wraz z profesorem Witoldem Respondek (Politechnika Łódźka oraz INSA de Rouen Normandie).

MSC (2020): 93B18, 93B27, 93C10, 53B05

Literatura

- [1] M. Nowicki, W. Respondek, *Mechanical feedback linearization of single-input mechanical control systems*, IEEE Trans. Autom. Control, 2024, vol. 68, no. 12, pp. 7966-7973.
- [2] M. Nowicki, W. Respondek, *Mechanical linearization of mechanical control systems without controllability assumption*, Automatica, 2024, vol. 155, 111098.

Płaskie wyjścia nieliniowych układów sterowania z symetriami

Witold Respondek

Politechnika Łódzka

e-mail: witold.respondek.1@p.lodz.pl

Nieliniowy układ sterowania

$$\dot{x} = F(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U,$$

gdzie X i U są otwartymi podzbiórami, odpowiednio, $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ (ogólniej, n - i m -wymiarową rozmaitością) nazywamy *płaskim (flat)*, zob. [1], jeżeli lokalnie istnieje m funkcji $h_i = h_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)})$, $1 \leq i \leq m$, liczba całkowita $s \geq 0$ oraz gładkie odwzorowania γ i δ takie, że

$$x = \gamma(h, \dot{h}, \dots, h^{(s-1)}) \quad \text{oraz} \quad u = \delta(h, \dot{h}, \dots, h^{(s)})$$

dla każdego gładkiego sterowania $u(t)$ i wzdłuż odpowiadającej mu trajektorii $x(t)$. Odwzorowanie $h = (h_1, \dots, h_m)$ nazywamy *płaskim wyjściem*.

W referacie będziemy analizować następujące pytanie postawione przez Rouchon et al [3, 4]: jeżeli płaski układ sterowania dopuszcza grupę symetrii, to czy również posiada płaskie wyjścia zachowywane przez tę grupę?

Będziemy zajmować się układami liniowymi względem sterowania, tzn. postaci

$$\Delta: \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i g_i(x).$$

Oznaczmy przez $\mathcal{G} = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ dystrybucję rozpiętą przez pola wektorowe g_i . Rozważmy działanie $\Phi : \Gamma \times X \rightarrow X$ grupy Liego Γ na rozmaitości X i dla każdego $\gamma \in \Gamma$ oznaczmy przez $\Phi_\gamma : X \rightarrow X$ dyfeomorfizm $\Phi_\gamma(\cdot) = \Phi(\gamma, \cdot)$. Powiemy, że Φ definiuje grupę symetrii układu Δ lub, że Γ jest grupą symetrii układu Δ , jeżeli dla każdego $\gamma \in \Gamma$ dyfeomorfizm $\Phi_\gamma \in \Gamma$ jest symetrią dystrybucji $\mathcal{G}$, tzn.

$$(\Phi_\gamma)_* \mathcal{G} = \mathcal{G}.$$

Naturalne jest następujące pytanie, postawione przez Rouchon et al [3, 4]. Czy płaski układ Δ , dla którego Γ jest grupą symetrii poprzez działanie Φ , posiada płaskie wyjście $h = (h_1, \dots, h_m)$ zgodne z działaniem Γ ? Ta ostatnia własność oznacza istnienie działania $\rho : \Gamma \times Y \rightarrow Y$ grupy Γ na przestrzeni $Y = \mathbb{R}^m$ wartości odwzorowania $h = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ takiego, że

$$\rho_\gamma(h) = h(\Phi_\gamma).$$

Omówimy rozwiązanie problemu dla 3-wymiarowych układów z dwoma sterowaniami zaproponowane w [2]. Podamy pełną charakteryzację istnienia Γ -zgodnych płaskich wyjść w terminach fundamentalnych pól wektorowych działania grupy. Bazując na tej charakteryzacji podamy przykłady Γ -zgodnych wyjść dla płaskich układów z 3 stanami i 2 sterowaniami i, co najważniejsze, odpowiemy na pytanie Rouchon et al [3, 4].

MSC (2020): 93B27, 93B17, 93B18, 93C10, 57S15, 57S17

Literatura

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 1999, 61, 1327–1361.
- [2] S. Li, W. Respondek, *Do flat systems admit a flat output compatible with a symmetry group action?*, preprint, 2025.
- [3] P. Martin, R.M. Murray, P. Rouchon, *Flat systems, equivalence and trajectory generation*, CDS Technical Report, Caltech 2003.

- [4] P. Rouchon, *Motion planning and tracking for differentially flat systems*, CIRM, 2012, https://cas.minesparis.psl.eu/~rouchon/Seminars/CIRM_nov_2012.pdf

Jednorodna aproksymacja nieliniowych układów sterowania: podejście algebraiczne

Grigorij Sklyar

Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie

e-mail: gsklyar@zut.edu.pl

Współautorzy: **Svetlana Ignatovich** (Charkowski Uniwersytet Narodowy im. Karazina)

W r. 1979 M. Fliess zaproponował zastosowanie całek Chena do opisu nieliniowych układów sterowania afinicznych względem sterowania w otoczeniu punktu równowagi. W tym podejściu trajektoria układu startująca z punktu równowagi jest reprezentowana przez szereg iterowanych całek (nieliniowe momenty potęgowe), które uogólniają klasyczne momenty do przypadku nieliniowego. Współczynnikami szeregu są stałe wektory, które zależą od pochodnych w punkcie równowagi pól wektorowych definiujących układ. Szeregi te można traktować jako uogólnienia szeregu Taylora dla funkcji wektorowej. Podobnie jak szereg Taylora, szeregi nieliniowych momentów potęgowych można wykorzystywać do celów aproksymacji; prowadzi to do pojęcia jednorodnej aproksymacji układu. Główna zaleta szeregów momentów potęgowych wynika z faktu, że takie szeregi tworzą wolną algebrę łączną. To pozwala na stosowanie i rozwijanie algebraicznych narzędzi, co okazało się obiecujące dla praktycznego, z wykorzystaniem komputerów, znajdowania jednorodnych aproksymacji nieliniowych układów sterowania. W szczególności, w ramach tego podejścia mamy głównie do czynienia z wektorami zamiast funkcjami wektorowymi i dlatego wystarczy używać liniowych, algebraicznych i kombinatorycznych operacji. Główna część wykładu będzie składać się z wyników badań prowadzonych przez S. Skyara i S. Ignatovich w ciągu ostatnich 25 lat.

MSC (2020): 93C10

Własności dwuszczipowego modelu dengi z wertykalną transmisją

Urszula Skwara

Uniwersytet Warszawski

e-mail: urszulaskwara@mimuw.edu.pl

Denga jest chorobą wirusową przenoszoną na ludzi poprzez ukąszenia zakażonych komarów z gatunku *Aedes aegypti* lub rzadziej *Aedes albopictus*. Zgodnie z danymi Światowej Organizacji Zdrowia [2] połowa populacji świata jest narażona na dengę. Szacuje się, że każdego roku odnotowuje się od 100 do 400 milionów zakażeń. Denga występuje głównie na obszarach klimatu tropikalnego i subtropikalnego, jednakże ze względu na zmiany klimatyczne oraz rosnącą mobilność przypadki tej choroby były również obserwowane w ostatnich latach w Europie. Wirus dengi występuje w czterech typach serologicznych: DENV-1, DENV-2, DENV-3 i DENV-4. Zakażenie jednym szczepem wirusa nie daje trwałej odporności na pozostałe. Ponadto wtórna infekcja innym szczepem jest związana z ryzykiem wystąpienia gorączki krwotocznej i zespołu wstrząsu, co w większości przypadków kończy się hospitalizacją. Wirus dengi może być również przenoszony z zakażonych samic komarów na larwy. Taki rodzaj przenoszenia wirusa jest nazywany wertykalną transmisją.

W pracy [1] został zaproponowany dwuszczipowy model dengi opisujący dynamikę przenoszenia tej choroby zarówno w populacji ludzi jak i w populacji komarów z uwzględnieniem wertykalnej transmisji w populacji komarów. Ze względu na nietypowe własności zaproponowanego modelu została wprowadzona jego modyfikacja. Omówimy własności tak zmodyfikowanego modelu związane z wyznaczeniem współczynnika reprodukcji epidemii oraz stabilnością punktów równowagi. Wyniki analityczne zostały uzupełnione symulacjami numerycznymi. Opowiemy również o innych modyfikacjach zaproponowanego modelu i konsekwencjach wynikających z tych modyfikacji.

MSC (2020): 37N25

Literatura

- [1] M. Choiński, J. Renčławowicz, U. Skwara, *Mathematical analysis of two-strain host-vector dengue model with vertical transmission*, Nonlinear Dyn. Psychol. Life Sci., 2025, 29(2), 215–255.

- [2] World Health Organization, *Vector-borne diseases*, Geneva 2024, <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/dengue-and-severe-dengue>.

Algebraiczne warunki osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym

Małgorzata Wyrwas

Politechnika Białostocka

e-mail: m.wyrwas@pb.edu.pl

Współautorzy: **Zbigniew Bartosiewicz** (Politechnika Białostocka), **Arvo Kaldmäe** (Politechnika w Tallinie), **Ülle Kotta** (Politechnika w Tallinie)

Omówiony zostanie problem osiągalności analitycznych nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym, określonych przez równania różnicowe. Bazując na pracy [1], przedstawione i omówione zostaną warunki konieczne i wystarczające osiągalności w punktach stałych odwzorowań związanych z rozważanymi układami. Warunki te wyrażone są w języku ideałów kielków funkcji analitycznych oraz modułów kielków jednoform niezmienniczych względem operatorów przesunięcia związanych z rozważanym układem w przestrzeni stanów. Prezentowane wyniki stanowią rozszerzenie rezultatów uzyskanych w pracy [1]. Pokażemy, że zaprezentowane metody umożliwiają badanie osiągalności w wybranych punktach i wykraczają poza dotychczas znane podejścia, oparte na polach wektorowych oraz podprzestrzeniach jednoform różniczkowych.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr W/WI/2/2023 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 93B05, 93C10

Literatura

- [1] Z. Bartosiewicz, A. Kaldmäe, Ü. Kotta, M. Wyrwas, *Algebraic Conditions for Accessibility of Discrete-Time Nonlinear Control Systems*, IEEE Trans. Autom. Control, 2025, 70(4), 2334–2345.

Matematyczne aspekty hiperzespoleonych sieci neuronowych

Ograniczone maszyny Boltzmanna dla danych o wartościach zespolonych

Maciej Jaworski

Politechnika Krakowska

e-mail: maciej.jaworski@pk.edu.pl

Popularne ostatnimi czasy modele generatywne, takie jak GAN czy Stable Diffusion, osiągają wysoką jakość generowanych danych, lecz są trudne w trenowaniu i często brakuje im interpretowalności. W przeciwieństwie do nich, Ograniczone Maszyny Boltzmanna (RBM) [4], choć o mniejszych możliwościach, oferują prostą i dobrze rozumianą strukturę probabilistyczną. Modelują bezpośrednio rozkład Boltzmanna możliwych stanów sieci, a ich trening oparty jest na minimalizacji funkcji energii.

W pracy prezentujemy rozszerzenie sieci RBM do przestrzeni zespolonej (complex-valued RBM, cvRBM) [2], w której wejścia, wagi i biasy warstwy wejściowej są liczbami zespolonymi.

Model cvRBM

Standardowa energia w sieci RBM dana jest wzorem:

$$E(v, h) = -v^T W h - b^T v - c^T h,$$

gdzie v i h to odpowiednio warstwy widzialna i ukryta sieci, W to macierz wag łączących neurony obu warstw, a b i c to wektory biasów dla warstw v i h . W wersji zespolonej, by energia pozostała rzeczywista, definiujemy:

$$E(v, h) = -\Re(v^\dagger W h) - \Re(b^\dagger v) - c^T h$$

Przy oznaczeniach:

$$v = \Re(v) + i\Im(v), \quad W = \Re(W) + i\Im(W), \quad b = \Re(b) + i\Im(b)$$

otrzymujemy:

$$E(v, h) = -\Re(v)^T \Re(W) h - \Im(v)^T \Im(W) h - \Re(b)^T \Re(v) - \Im(b)^T \Im(v) - c^T h$$

czyli model ekwiwalentny do dwóch połączonych sieci RBM z dzieleniem informacji na komponent rzeczywisty i urojony.

Eksperymenty

Badania przeprowadzono na zbiorze MNIST. W wersji klasycznej użyto oryginalnych obrazów, natomiast w cvRBM dane wejściowe to $v = x + iy$, gdzie x to obraz, a y to wynik filtru Sobela.

Do uczenia zastosowano algorytm Contrastive Divergence (CD-1) [1], 300 epok, różne liczby neuronów ukrytych (20-220). Porównano błąd rekonstrukcji i wygenerowane próbki. Wyniki wstępne pokazują, że cvRBM uchwytuje osiąga dokładności porównywalne z klasyczną siecią RBM.

Dalsze kierunki badań

Badania wykonane w ramach pracy mogą zostać poszerzone w wielu interesujących kierunkach:

- alternatywne funkcje energii (np. z pełnym sprzężeniem hermitowskim),
- zastosowanie do innych danych (fizycznych, kwantowych),
- rozszerzenie do gaussowskich sieci cvRBM [3].

MSC (2020): 62M45, 68T07

Literatura

- [1] G. Hinton, *Training Products of Experts by Minimizing Contrastive Divergence*, Neural Computation, 2022, 14 1771–1800.
- [2] M. Jaworski, A. Niemczynowicz, R. Kycia, *Complex-valued Restricted Boltzmann Machines for Learning Image Data Distributions*, Proc. of the International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing, 2024.
- [3] T. Nakashika, S. Takaki, J. Yamagishi, *Complex-Valued Restricted Boltzmann Machine for Direct Speech Parameterization from Complex Spectra*, Proc. of the Interspeech 2017, 4021–4025.
- [4] P. Smolensky, *Chapter 6: Information Processing in Dynamical Systems: Foundations of Harmony Theory*, Rumelhart, David E.; McClelland, James L. (eds.). Parallel

Distributed Processing: Explorations in the Microstructure of Cognition, Volume 1: Foundations, MIT Press, 1986, 194–281.

Sieci hiperzespolone w przewidywaniu szeregów czasowych opisujących notowania giełdowe

Radosław Antoni Kycia

Politechnika Krakowska

e-mail: kycia.radoslaw@gmail.com

Współautorzy: **Agnieszka Niemczynowicz** (Politechnika Krakowska)

W referacie przedstawimy wykorzystanie hiperzespolonych sieci neuronowych w predykcji szeregów czasowych. Przykładem którym się posłużymy jest przewidywanie przyszłych wartości szeregów czasowych opisujących akcje na giełdzie. Hiperzespolone sieci neuronowe w porównaniu do klasycznych cechują się mniejszą liczbą parametrów podlegających uczeniu przy podobnej dokładności przewidywania. Pozwala to efektywnie wykorzystywać zasoby komputera. Prezentacja będzie oparta na publikacji [1].

MSC (2020): 62M45, 62M10

Literatura

- [1] R. Kycia, A. Niemczynowicz, *4D hypercomplex-valued neural network in multivariate time series forecasting*, Sci Rep 15, 23713 (2025), DOI: [10.1038/s41598-025-08957-5](https://doi.org/10.1038/s41598-025-08957-5).

Hiperzespolone sieci neuronowe: aktualny stan wiedzy i perspektywy rozwoju

Agnieszka Niemczynowicz

Politechnika Krakowska

e-mail: a.niemczynowicz@pk.edu.pl

Hiperzespolone sieci neuronowe (HvNN, ang. *Hypercomplex-valued Neural Networks*) stanowią intensywnie rozwijający się obszar badań, który rozszerza klasyczne (rzeczywiste) sztuczne sieci neuronowe na wyższe systemy liczbowe,

takie jak liczby zespolone, kwaterniony czy oktoniony. Tego rodzaju architektury oferują szereg unikalnych zalet, w tym możliwość efektywnego przetwarzania danych wielowymiarowych, zachowania informacji o fazie i amplitudzie sygnału, a także redukcji złożoności modeli poprzez współdzielenie parametrów.

Niniejszy wykład stanowi kompleksowe omówienie aktualnego stanu wiedzy w zakresie hiperzespolonych sieci neuronowych, obejmując ich podstawy matematyczne, rozwiązania architektoniczne oraz kluczowe obszary zastosowań. Przedstawione zostaną również główne wyzwania badawcze związane z dalszym rozwojem tej tematyki. Szczególny nacisk położono na rosnący potencjał HvNN jako zaawansowanego narzędzia we współczesnych kierunkach uczenia maszynowego oraz na konieczność kontynuowania prac teoretycznych i wdrożeniowych w tym zakresie.

MSC (2020): 68T07, 15A66, 68T05, 68T99

Literatura

- [1] A. Cayley, *On certain results relating to quaternions*, Philos. Mag., 1845, 26, 141–145.
- [2] A. Cayley, *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley, Sc.D., F.R.S., Vol. 1*, Cambridge University Press, Cambridge, 1889, pp. 123–126.
- [3] G. Cybenko, *Approximation by superpositions of a sigmoidal function*, MCSS, 1989, 2(4), 303–314.
- [4] L.E. Dickson, *On quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem*, Ann. Math., 1919, 20(3), 155–171.
- [5] K. Hornik, M. Stinchcombe, H. White, *Multilayer feedforward networks are universal approximators*, Neural Networks, 1989, 2(5), 359–366.
- [6] A. Niemczynowicz, R. A. Kycia, *KHNN: Hypercomplex-valued neural networks computations via Keras using TensorFlow and PyTorch*, SoftwareX, 2025, 30, 102163, DOI: [10.1016/j.softx.2025.102163](https://doi.org/10.1016/j.softx.2025.102163).

Struktury regresji zespolonej

Dariusz Partyka

Katolicki Uniwersytet Lubelski

Państwowa Akademia Nauk Stosowanych w Chełmie

e-mail: dariusz.partyka@kul.pl

Współautorzy: **Agnieszka Szumera** (Państwowa Akademia Nauk Stosowanych w Chełmie)

W pracach [1] i [2] podjęto próbę zunifikowania badań nad zagadnieniami regresji poprzez koncepcję *struktur regresji* $\mathfrak{R} := (A, B, \delta; x, y)$, gdzie

- (i) A i B są zbiorami niepustymi;
- (ii) $x: \Omega_1 \rightarrow A$ i $y: \Omega_2 \rightarrow B$ dla pewnych zbiorów niepustych Ω_1 i Ω_2 ;
- (iii) $\delta: (\Omega_1 \rightarrow B) \times (\Omega_2 \rightarrow B) \rightarrow \hat{\mathbb{R}}$, gdzie $\hat{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, zaś symbol $(X \rightarrow Y)$ oznacza rodzinę wszystkich funkcji określonych na zbiorze X i o wartościach w zbiorze Y .

Zbiór $\mathcal{F}$ nazywa się *modelem funkcyjnym struktury* $\mathfrak{R}$, gdy $\mathcal{F} \subset (A \rightarrow B)$. Składowe x , y i δ struktury $\mathfrak{R}$ oraz jej model funkcyjny $\mathcal{F}$ mają następującą interpretację:

- $\mathcal{F}$ jest teoretycznym modelem funkcyjnym obserwowanego zjawiska, tzn. rodzina $\mathcal{F}$ składa się ze wszystkich funkcji opisujących teoretycznie badane zjawisko;
- x i y są *funkcjami danych empirycznych* uzyskanych na podstawie pomiarów obserwowanego zjawiska;
- δ jest kryterium odchylenia funkcji teoretycznych od danych doświadczalnych reprezentowanych przez funkcje x i y .

Problem regresji dla modelu funkcyjnego $\mathcal{F}$ względem struktury regresji $\mathfrak{R}$ polega na wyznaczeniu optymalnych funkcji teoretycznych $f_0 \in \mathcal{F}$, które są najlepiej dopasowane do danych empirycznych, reprezentowanych przez funkcje x i y , ze względu na kryterium odchylenia δ . Prowadzi to do zagadnienia ekstremalnego badania rodziny $\text{Reg}(\mathcal{F}, \mathfrak{R})$ złożonej ze wszystkich funkcji $f_0 \in \mathcal{F}$ minimalizujących funkcjonał

$$\mathcal{F} \ni f \rightarrow \delta(f \circ x, y) \in \hat{\mathbb{R}}.$$

Takie funkcje f_0 nazywane są *funkcjami regresji w $\mathcal{F}$ ze względu na strukturę regresji $\mathfrak{R}$* .

Referat ma na celu przegląd wyników dotyczących struktur regresji zespolonych, czyli przypadku, gdy $B = \mathbb{C}$. Rozpatrywanymi modelami funkcyjnymi $\mathcal{F}$ są rodziny funkcji zespolonych tworzących strukturę przestrzeni liniowych nad ciałem liczb zespolonych, zaś kryterium odchylenia δ jest oparte na klasycznej metodzie najmniejszych kwadratów. W szczególności rozważane są probabilistyczne struktury regresji, gdzie kryterium δ jest określone za pomocą miary probabilistycznej, por. [3].

MSC (2020): 62J02, 00A71

Literatura

- [1] D. Partyka, J. Zając, *Generalized problem of regression*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, 2010, 60(1), 77–94.
- [2] D. Partyka, J. Zając, *Generalized approach to the problem of regression*, Anal. Math. Phys, 2015, 5, 249–320.
- [3] A. Szumera, *Probabilistic regression structures*, Bull. Soc. Sci. Lett. Łódź, 2018, 68(3), 21–38.

Rachunek prawdopodobieństwa i jego synergie

Niegaussowskie granice dla pewnych funkcjonałów geometrycznych dla otoczek wypukłych generowanych przez dwa niezależne spacery losowe

Wojciech Cygan

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: wojciech.cygan@uwr.edu.pl

Niech L_n oznacza obwód otoczki wypukłej wygenerowanej przez wszystkie punkty należące do trajektorii dwóch niezależnych spacerów losowych w $\mathbb{R}^2$ do chwili n , których przyrosty mają skończone drugie momenty. Dla większości konfiguracji wektorów dryfu tych spacerów wiadomo, że scentrowany i przeskalowany obwód zbiega według rozkładu do zmiennej losowej o rozkładzie normalnym. W tym referacie przedstawimy interesujące pozostałe przypadki, gdy graniczne zmienne losowe nie mają rozkładu normalnego.

Jeśli oba spacery mają identyczne, niezerowe wektory dryfu, wówczas omówimy następujący wynik:

$$\frac{L_n - \mathbb{E}[L_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{distr.}} \text{całka It\^o}.$$

W przypadku, gdy jeden ze spacerów ma zerowy dryf, a drugi dryf niezerowy, otrzymujemy następujący wynik:

$$\frac{L_n - \mathbb{E}[L_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{distr.}} \text{rozkład normalny} + \text{rozkład niegaussowski}.$$

Innym interesującym nas obiektem geometrycznym opisującym rozmiar badanej przez nas otoczki wypukłej jest jej średnica. Niech teraz D_n oznacza średnicę otoczki wypukłej wygenerowanej przez trajektorie dwóch niezależnych spacerów losowych w $\mathbb{R}^2$ do chwili n , których przyrosty mają skończone drugie momenty. W tym wypadku omówimy następującą zbieżność:

$$\frac{D_n - \mathbb{E}[D_n]}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{distr.}} \text{granica typu maksimum.}$$

W wielu przypadkach nie jest to rozkład normalny, ale w niektórych szczególnych przypadkach granica ta ma rozkład normalny.

W trakcie wystąpienia przedstawimy szczegółowo wyżej wspomniane zbieżności oraz odpowiednie obiekty graniczne oraz omówimy krótko nasze podejście, które opiera się na wielowymiarowym odpowiedniku twierdzenia granicznego Wald’a dla maksimum w połączeniu z techniką aproksymacji w L^2 bazującą na użyciu różnic martyngałowych.

Referat oparty jest na pracy wspólnej z: Andrew Wade, Mo Dick Wong (Durham University) oraz Tomislav Kralj, Nikola Sandrić, Stjepan Šebek (University of Zagreb).

MSC (2020): 60G50, 60D05, 60F15, 60J65, 52A22

Statystyka matematyczna a statystyka kwantowa. Strategie bayesowska i minimaksowa

Andrzej Łuczak

Uniwersytet Łódzki

e-mail: andrzej.luczak@wmii.uni.lodz.pl

W statystyce matematycznej głównym obiektem badań jest rodzina $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ rozkładów prawdopodobieństwa na pewnej przestrzeni mierzalnej $(\mathcal{X}, \mathfrak{A})$. W statystyce kwantowej takim obiektem jest rodzina $\{\rho_\theta : \theta \in \Theta\}$ stanów na pewnej algebrze operatorów opisującej obserwowalnego badanego układu kwantowego. Naszym zadaniem jest określenie w możliwie najlepszy sposób, który z rozkładów (stanów) jest tym rzeczywistym. Podstawowymi podejściami są tutaj podejście bayesowskie i minimaksowe. W referacie omówione będą oba te podejścia ze szczególnym uwzględnieniem specyfiki „kwantowej”.

MSC (2020): 81P18, 62C05

Od nierówności Dooba do oszacowań związanych z operatorem Hardy’ego

Michał Strzelecki

Uniwersytet Warszawski

e-mail: michalst@mimuw.edu.pl

Klasyczny operator Hardy’ego zadany jest wzorem

$$Hf(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f(s)ds, \quad t \geq 0,$$

dla lokalnie całkowalnych funkcji $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Do znalezienia jego normy na przestrzeni $L^p([0, \infty))$, $1 < p \leq \infty$, można użyć nierówności Dooba.

W moim referacie opowiem, jak w podobny sposób można udowodnić inne oszacowania związane z operatorem Hardy’ego – przypomnę pochodzący od Burkholdera dowód nierówności Dooba, a następnie wyjaśnię, jak wykorzystać go do wyprowadzenia interesujących nas oszacowań.

MSC (2020): 60G46, 26D10, 42B20, 46E30

Literatura

- [1] M. Strzelecki, *The L^p -norms of the Beurling–Ahlfors transform on radial functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 2017, 42(1), 73–93.
- [2] M. Strzelecki, *Hardy’s operator minus identity and power weights*, J. Funct. Anal., 2020, 279(2), 108532.

Rozkład Levy’ego-Khinchine’a dla grup kwantowych

Anna Wysoczańska-Kula

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: anna.kula@math.uni.wroc.pl

Znany od lat 30. XX wieku wzór L’evy’ego-Khinchine’a umożliwia klasyfikację procesów L’evy’ego na $\mathbb{R}^n$ poprzez ich generatory. Co więcej, pokazuje on, że generatory procesów L’evy’ego są kombinacjami części ciągłych (gaussowskich) i części skokowych. W moim wystąpieniu omówię pojęcie procesów Lévy’ego na

zwartych grupach kwantowych oraz problem istnienia analogicznego rozkładu dla ich generatorów. Opowiem o dotychczasowych wynikach m.in. dla uniwersalnych grup kwantowych U_F^+ i O_F^+ [1], dla kwantowych deformacji grup $SU(n)$ ([2, 4]) oraz o częściowych rezultatach uzyskanych dla q -deformacji innych grup Liego [3].

MSC (2020): 46L53, 46L67, 60G51

Literatura

- [1] B. Das, U. Franz, A. Kula, A. Skalski, *Lévy-Khintchine decompositions for generating functionals on algebras associated to universal compact quantum group*, IDAQP 2018, 21(3), 1850017.
- [2] U. Franz, A. Kula, M. Lindsay, M. Skeide, *Hunt's Formula for $SU_q(N)$ and $U_q(N)$* , Indiana Univ. Math. J. 2023, 72, 1717–1748.
- [3] U. Franz, A. Kula, M. Lindsay, *Lévy-Khintchine decomposition problem and commutation relations*, w przygotowaniu.
- [4] M. Schürmann, M. Skeide, *Infinitesimal generators on the quantum group $SU_q(2)$* , IDAQP 1998, 1(4), 573–598.

Rzeczywista geometria algebraiczna i teoria osobliwości

Twierdzenia o jednostajnej (retrakcyjnej) wymierności i ich zastosowania

Juliusz Banecki

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: juliusz.banecki@student.uj.edu.pl

W referacie opowiem o moich niedawnych wynikach dotyczących jednostajnej (retrakcyjnej) wymierności w geometrii algebraicznej, i ich zastosowaniach w problemach aproksymacji. Wyniki te dotyczą zarówno przypadku rzeczywistego, jak i zespolonego.

MSC (2020): 14M20

Literatura

- [1] J. Banecki, *Retract rational varieties are uniformly retract rational*, ArXiv:2411.17892.
- [2] J. Banecki, *Relative Stone-Weierstrass theorem for mappings between varieties*, ArXiv:2408.09233.

Rzeczywista hipoteza jacobianowa przy niskich stopniach składowych

Janusz Gwoździewicz

Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie

e-mail: janusz.gwozdziewicz@uken.krakow.pl

Rzeczywista hipoteza jacobianowa to stwierdzenie, że każde odwzorowanie wielomianowe płaszczyzny rzeczywistej w siebie o nigdzie nieznikającym wyznaczniku Jacobiego jest globalnym dyfeomorfizmem. Okazała się fałszywa. Zachodzi jednak jeśli założyć, że stopnie składowych są dostatecznie niskie. Opowiem o pierwszym nierozstrzygniętym przypadku gdy obie składowe mają stopień 6.

MSC (2020): 14R15

Literatura

- [1] F. Braun, F. Fernandes, B. Oréface-Okamoto, *Injectivity of polynomial maps and foliations of the real plane*, *Nonlinear Anal.*, 2025, 250, 113645.
- [2] J. Gwoździewicz, *On real Jacobian mates*, *Ann. Polon. Math.*, 2016, 117, 207–213.

Skoki liczb Milnora w liniowych deformacjach osobliwości

Tadeusz Krasinski

Uniwersytet Łódzki

e-mail: tadeusz.krasinski@wmii.uni.lodz.pl

Współautorzy: Aleksandra Zakrzewska (Uniwersytet Łódzki)

Skokiem liczby Milnora izolowanej osobliwości zespolonej f_0 nazywamy minimalną niezerową różnicę między liczbami Milnora f_0 i jej dowolnej deformacji

f_s . W referacie omówię rezultaty o skokach liczb Milnora w klasie szczególnych deformacji osobliwości f_0 – deformacji liniowych postaci $f_s = f_0 + sg$.

MSC (2020): 32S05

Odwzorowania ciągłe z algebraicznie konstruowalnymi wykresami

Wojciech Kucharz

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: wojciech.kucharz@im.uj.edu.pl

Badamy odwzorowania między rzeczywistymi zbiorami algebraicznymi. Klasa odwzorowań ciągłych z algebraicznie konstruowalnymi wykresami jest znacznie większa niż klasa odwzorowań regularnych. Udowodnimy jednak, że te dwa rodzaje odwzorowań mają podobne własności związane z transformacjami cykli algebraicznych.

MSC (2020): 14P05, 14P25

Twierdzenie typu Hartogsa dla odwzorowań o wykresie algebraicznie konstruowalnym

Krzysztof Kurdyka

Université Savoie Mont Blanc

e-mail: kurdyka@univ-smb.fr

Opowiem o ostatnio uzyskanych, wspólnie z Wojciechem Kucharzem, wynikach dla odwzorowań ciągłych o wykresie algebraicznie konstruowalnym. W szczególności dowodzimy, że tą własność wystarczy mieć w restrykcji do krzywych algebraicznych nierozkładalnych. Podobny wynik otrzymaliśmy w pracy [1] w przypadku funkcji Nash'a.

MSC (2020): 14P05, 14P25

Literatura

- [1] W. Kucharz, K. Kurdyka, A. El-Siblani, *Separately Nash and arc-Nash functions over real closed fields*, Bull. London Math. Soc., 2021, 53, 426–441.

O nieregularnych liczbach Łojasiewicza II

Andrzej Lenarcik

Politechnika Świętokrzyska

e-mail: andrzej.lenarcik@gmail.com

Rozważamy pierścień szeregów zbieżnych dwóch zmiennych zespolonych. Każdy taki szereg definiuje lokalnie kiełek funkcji analitycznej. Osobliwością nazywamy kiełek znikający w zerze wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu. Osobliwość jest izolowana, gdy gradient funkcji ma zero izolowane w zerze. Wówczas norma gradientu jest lokalnie większa od iloczynu dodatniej stałej i normy argumentu podniesionej do pewnego dodatniego wykładnika. Infimum po wszystkich możliwych takich wykładnikach nazywamy lokalnym wykładnikiem Łojasiewicza gradientu. Płoski [7] udowodnił, że wykładnik ten znajduje się w zbiorze

$$\left\{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5, \dots\right\},$$

czyli jest postaci

$$N + \frac{b}{a}, \quad a, b, N \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq b < a < N.$$

García Barroso i Płoski [3] dostrzegli, że nie każda z podanych liczb jest realizowana, jako wykładnik Łojasiewicza gradientu. Z kolei w pracy [2], gdy do zespołu dołączył T. Krasieński, wyjaśniono, że każda liczba Łojasiewicza spełniająca dodatkowy warunek regularności $a + b \leq N$ jest realizowana dla pewnej osobliwości niezdegenerowanej w sensie Kuoch-nirenki. To było impulsem do poszukiwania nieregularnych liczb Łojasiewicza, takich że $a + b > N$ (najmniejszą taką liczbą okazało się $15\frac{8}{9}$). Ponadto podano warunek konieczny, jaki musi spełniać struktura osobliwości z nieregularną liczbą Łojasiewicza gradientu wraz z ciekawym przykładem liczby $169\frac{142}{143}$, spełniającej warunek konieczny, która jednak nie może być zrealizowana przez żadną osobliwość. W styczniu 2025, podczas XLV Konferencji i Warsztatów „Geometria Analityczna i Algebraiczna”

w Łodzi, autor referatu przypomniał część wyników z pracy [2] oraz wyjaśnił efekt, związany z nieistnieniem osobliwości realizujących niektóre liczby Łojasiewicza spełniające warunek konieczny, z pomocą tzw. drzew Eggersa-Płoskiego ([4, 5]). Drzewa te, będące wariantem oryginalnej konstrukcji Eggersa [1], otrzymywane są w sposób niezmienniczy za pomocą dystansu logarytmicznego Płoskiego [6].

W przygotowywanym referacie autor przedstawi dalsze badania nieregularnych liczb Łojasiewicza.

MSC (2020): 32S05, 14H20

Literatura

- [1] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn 1982.
- [2] E.R. García Barroso, T. Krasieński, A. Płoski, *The Łojasiewicz numbers and plane curve singularities*, Ann. Polon. Math. 87, 2005, 127–149.
- [3] E.R. García Barroso, A. Płoski, *On the Łojasiewicz numbers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I (336), 2003, 585–588.
- [4] A. Lenarcik, *Eggers tree and jacobian Newton polygon*, Manuscripta Math. 142, 2013, 233–244.
- [5] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent, special direction and maximal polar quotient*, ArXiv:1112.5578v1.
- [6] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(11-12), 1985, 601–605.
- [7] A. Płoski, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, in: Singularities, Banach Center Publ. 20, PWN, Warszawa, 1988, 353–364.

Rekurencje Jeana dla dystrybucji Goursata revisited

Piotr Mormul

Uniwersytet Warszawski

e-mail: mormul@mimuw.edu.pl

Mój student Bartłomiej Sikorski spisuje obecnie na czysto do swojej planowanej publikacji bardzo dobry wynik z niedawnej pracy magisterskiej. Dotyczący osobliwości pewnych dystrybucji geometrycznych (podwiązek w wiązkach stycznych do rozmaitości). Dokładniej – ciągów wag nieholonomicznych dla dystrybucji

generujących tzw. specjalne multi-flagi, w geometrii algebraicznej znanych pod nazwą „flag Semple’a–Demailly’ego”. Obliczanych *jedynie* w najciekawszych osobliwych punktach, w których te dystrybucje są silnie nilpotentne (ang. *strongly nilpotent*). Jest to blisko związane ze stratyfikacją osobliwości specjalnych multi-flag rozpoczętą w [2] i kontynuowaną w [3].

Ciąg wag to pierwsza i najpodstawowsza charakterystyka geometryczna dystrybucji nieholonomicznej w danym punkcie. Koduje on proces wzrostu w punkcie *flagi Liego* dystrybucji. Z kolei flaga Liego to najważniejszy obiekt w analizie nieholonomicznej, jednak niewystępujący jawnie w samej definicji specjalnych multi-flag. W istocie specjalne multi-flagi zaczyna się badać lokalnie poprzez wyznaczanie ich ciągów wag w różnych punktach.

Punktem wyjścia do badań Sikorskiego było moje niedawne uzyskanie części dawniejszych (obecnie już klasycznych, [1]) rekurencji Jeana dla ciągów wag dystrybucji (też klasycznych!) Goursata, na krótkiej, czysto algebraicznej drodze. Okazuje się, że algebra liniowa w 2D szybko daje skomplikowane rekurencje dla ciągów wag, czyli wielkości geometrycznych, co prawda tylko w osobliwych punktach silnie nilpotentnych.

Jean używał w swojej pracy interpretacji kinematycznej dystrybucji Goursata – traktorów ciągnących „pociągi” złożone z wielu przyczepki. Jego rekurencje sięgały wstecz do pociągów krótszych o jedną i dwie przyczepki i zależały też od kątów między przyczepkami. W dowodzie Jean mistrzowsko żonglował wielomianami trygonometrycznymi od wielu kątów.

Celem prezentacji na Forum jest przedstawienie tego algebraicznego skrótu – jako wprowadzenie do głębokiego rezultatu Sikorskiego.

MSC (2020): 58A15, 58A17

Literatura

- [1] F. Jean *The car with N trailers; characterization of the singular configurations*, ESAIM:COCV, 1996, 1, 241–266.
- [2] P. Mormul *Singularity classes of special 2-flags*, SIGMA 5, 2009, 102.
- [3] P. Mormul *Singularity classes of special multi-flags, I*, Proceedings of the Interna-

tional Geometry Center, 2023, 16(2), 142–160.

Stratyfikacje i opis przez termy nad ciałami henselowskimi ze strukturą analityczną, jednostajne parametryzacje Yomdina–Gromova

Krzysztof Jan Nowak

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: nowak@im.uj.edu.pl

Przedstawię (zob. [3]) pewną gładką stratyfikację zbiorów i pewien opis przez termy funkcji, które są definiowalne nad ciałami henselowskimi (niekoniecznie algebraicznie domkniętymi, co stanowi całkowicie nowy rezultat) ze strukturą analityczną. Podstawowymi narzędziami są eliminacja kwantyfikatorów ciała z waluacją, struktura termalna funkcji definiowalnych oraz pewna definiowalna wersja kanonicznej desingularyzacji Bierstone’a–Milmana, uzyskana w mojej wcześniejszej pracy. Jako zastosowanie, przedstawię parametryzacje Yomdina–Gromova w wersji jednostajnej ze względu na rodziny definiowalne.

MSC (2020): 14B05, 14G22, 32S45, 32S60, 32B20, 32P05, 03C10, 03C98

Literatura

- [1] R. Cluckers, G. Comte, F. Loeser, *Non-Archimedean Yomdin–Gromov parametrizations and points of bounded height*, Forum Math., Pi, 2015, 3, e5.
- [2] R. Cluckers, A. Forey, F. Loeser, *Uniform Yomdin–Gromov parametrizations and points of bounded height in valued fields*, Algebra Number Theory, 2020, 14, 1423–1456.
- [3] K.J. Nowak, *Stratifications and term description over valued fields with analytic structure, uniform Yomdin–Gromov parametrizations*, ArXiv:2505.19814.

- [4] K.J. Nowak, *Tame topology in Hensel minimal structures*, Ann. Pure Appl. Logic, 2025, 176, 103540.

O rafinacjach Glaesera

Wiesław Pawłucki

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: wieslaw.pawlucki@uj.edu.pl

Przypomnę definicję pojęcia rafinacji Glaesera, jego własności i zastosowania.

MSC (2020): 54C60

Formuła Milnora osobliwości kwazi-zwyczajnych

Adam Różycki

Uniwersytet Łódzki

e-mail: adam.rozycki@wmii.uni.lodz.pl

Znana jest formuła Milnora wyrażająca liczbę Milnora osobliwości krzywych nierozkładalnych w terminach jej par charakterystycznych [3]. Liczby Lê stanowią uogólnienie liczby Milnora na przypadek osobliwości nieizolowanych [2]. Podejmujemy próbę wyrażenia liczb Lê osobliwości kwazi-zwyczajnych [1] o jednowymiarowym zbiorze punktów krytycznych w terminach jej par charakterystycznych.

MSC (2020): 32S25, 14J17

Literatura

- [1] J. Lipman, *Quasi-ordinary singularities of surfaces in $\mathbb{C}^3$* , Proc. Sympos. Pure Math. 40, 161-172, 1983.
- [2] D. Massey, *Lê Cycles and Hypersurface Singularities*, Lecture Notes in Mathematics 1615, 1995.

- [3] A. Płoski, *O niezmiennikach osobliwości krzywych analitycznych*, Materiały VII Konferencji Szkoleniowej z Zagadnień Ekstremalnych, 1986, <https://www.math.uni.lodz.pl/konfrogi/popzednie-konferencje>.

Problemy aproksymacyjne w geometrii algebraicznej

Karolina Zając

Uniwersytet Jagielloński

e-mail: karolina.w.zajac@doctoral.uj.edu.pl

Powszechnie znane twierdzenie Stone’a-Weierstassa daje możliwość jednostajnej aproksymacji dowolnej funkcji ciągłej na zbiorze zwartym za pomocą wielomianów. Na ogół jednak staje się to niemożliwe, jeżeli przestrzeń docelową zastąpimy pewnym zbiorem algebraicznym, nawet tak prostym jak sfera jednostkowa. Wymusza to poszerzenie rodziny odwzorowań aproksymujących w ramach klasy funkcji semialgebraicznych.

Przedstawimy na początek kilka problemów aproksymacyjnych, które oczekiwały się rozstrzygnięcia w ostatnich latach. Szczególnie interesujący jest rezultat uzyskany w pracy [1], dotyczący aproksymacji odwzorowań ciągłych o wartościach na sferze jednostkowej przy pomocy funkcji quasi-regularnych. Są to odwzorowania z jednej strony obejmujące funkcje regularne, a z drugiej strony stanowiące szczególną podrodzinę odwzorowań kawałkami regularnych, opisanych szczegółowo w artykule [2].

Następnie pokażemy, że metody podobne do zastosowanych w [1] dają analogiczny rezultat dla odwzorowań o wartościach w rzeczywistej przestrzeni rzutowej (praca wspólna z prof. Marcinem Bilskim).

MSC (2020): 41A30, 14P05

Literatura

- [1] M. Bilski, *Approximation of maps into spheres by piecewise-regular maps of class $\mathcal{C}^k$* , Math. Ann., 2020, 378, 763–776.
- [2] M. Bilski, W. Kucharz, *Approximation by piecewise-regular maps*, Adv. Math., 2020, 375, 107350.

Sesja ogólna, poświęcona innym zagadnieniom matematycznym

Uczenie głębokie w estymacji czasowo-zmiennych parametrów w modelach Markowa – zastosowania do regresji nieliniowej i stochastycznych równań różniczkowych

Andrzej Kałuza

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: akaluza@agh.edu.pl

Współautorzy: **Paweł M. Morkisz** (Akademia Górniczo-Hutnicza), **Paweł Przybyłowicz** (Akademia Górniczo-Hutnicza), **Martyna Wiącek** (Akademia Górniczo-Hutnicza), **Bartłomiej Mulewicz** (Aigorithmics sp. z o.o.)

Estymacja parametrów w modelach opartych na równaniach różniczkowych stochastycznych (SDE) jest zadaniem trudnym ze względu na złożoność parametrów zależnych od czasu, co często prowadzi do uproszczeń w postaci funkcji przedziałowo stałych.

Proponujemy nowe podejście do tego problemu z wykorzystaniem sieci neuronowych, stanowiące rozwinięcie metod tradycyjnych. W naszym algorytmie definiujemy odpowiednią funkcję straty w oparciu o metodę największej wiarygodności, co pozwala przekształcić zadanie aproksymacji w problem optymalizacji i zastosować techniki uczenia głębokiego.

Dowodzimy, że przy spełnieniu pewnych warunków

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\mathbb{E} \|X_1(t) - X_2(t)\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\|\Theta_1 - \Theta_2\|_{\infty}^{\alpha_1} + \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{\infty}^{\alpha_2} \right),$$

gdzie α_1 oraz α_2 są wykładnikami opisującymi warunki ciągłości Höldera dla współczynników dryfu i dyfuzji, X_1 jest procesem będącym rozwiązaniem danego SDE z rzeczywistą funkcją parametru $\Theta_1 = \Theta_1(t)$, a X_2 jest rozwiązaniem tego samego SDE, lecz z funkcją parametru $\Theta_2 = \Theta_2(t)$ otrzymaną z naszej sieci neuronowej, która aproksymuje Θ_1 .

Skuteczność naszego podejścia prezentujemy na serii eksperymentów numerycznych z użyciem Tensorflow (frameworka uczenia głębokiego). Porównujemy

trajektorie rozwiązań wygenerowane z wykorzystaniem dwóch zestawów funkcji parametrów – rzeczywistych oraz aproksymowanych. Ponadto porównujemy również rozkłady $X_1(T)$ i $X_2(T)$.

MSC (2020): 60J20, 65C30, 62M05

Literatura

- [1] A. Kałuża, P.M. Morkisz, B. Mulewicz, P. Przybyłowicz, M. Wiącek, *Deep learning-based estimation of time-dependent parameters in Markov models with application to nonlinear regression and SDEs*, Applied Mathematics and Computation, 2024, 480, 128906.
- [2] O. Dürr, B. Sick, E. Murina, *Probabilistic Deep Learning with Python, Keras and TensorFlow Probability*, Manning Publications, 2020.

Gładkość funkcji analitycznych w sensie Dunkla

Grzegorz Łysik

Uniwersytet Jana Kochanowskiego w Kielcach

e-mail: glysik@ujk.edu.pl

W pracy [2] została podana charakteryzacja funkcji rzeczywisto-analitycznych w terminach średnich całkowych po kulach euklidesowych. Charakteryzacja ta motywuje wprowadzenie pojęcia funkcji analitycznej na przestrzeni metrycznej z miarą. Mianowicie funkcję ciągłą u na przestrzeni metrycznej z miarą (X, ρ, μ) nazywamy (X, ρ, μ) -analityczną jeśli jej średnia całkowita względem miary μ po kulach o promieniu R w metryce ρ wyraża się poprzez zbieżny szereg potęgowy względem R . Takie funkcje spełniają własność jednoznaczności *jeśli funkcja zdefiniowana na obszarze znika na niepustym podzbiorze, to znika na całym obszarze*, [3]. Z drugiej strony Charles Dunkl w pracy [1] rozwinął analizę harmoniczną związaną ze skończoną grupą odbić na $\mathbb{R}^n$.

Na wykładzie wprowadzę pojęcie funkcji analitycznych w sensie Dunkla względem grupy Coxetera-Weyla odbić na $\mathbb{R}^n$ oraz wykaże ich gładkość, [4].

MSC (2020): 33C52, 26E10, 32A05

Literatura

- [1] C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc., 1989, 311, 167–183, DOI: [10.1090/S0002-9947-1989-0951883-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1989-0951883-8).

- [2] G. Łysik, *A characterization of real analytic functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., 2018, 43, 475–482, DOI: [10.5186/aasfm.2018.4325](https://doi.org/10.5186/aasfm.2018.4325).
- [3] G. Łysik, *A uniqueness property for analytic functions on metric measure spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 2020, 148, 1679–1688, DOI: [10.1090/proc/14885](https://doi.org/10.1090/proc/14885).
- [4] G. Łysik *Smoothness of the Dunkl analytic functions*, Periodica Math. Hungar., 2025, DOI: [10.1007/s10998-025-00639-z](https://doi.org/10.1007/s10998-025-00639-z).

Zastosowanie metody B-TOPSIS w analizie danych ankietowych: ocena jakości życia mieszkańców miast Europy

Ewa Roszkowska

Politechnika Białostocka

e-mail: e.roszkowska@pb.edu.pl

Współautorzy: **Tomasz Wachowicz** (Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach)

Podczas prezentacji przedstawiona zostanie autorska modyfikacja wielokryterialnej metody B-TOPSIS [2], łącząca koncepcję struktury przekonań (Belief Structure) z klasycznym algorytmem TOPSIS (Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution). Modyfikacja umożliwia analizę danych ankietowych z uwzględnieniem braków i odmów odpowiedzi. W pierwszym kroku procedury odpowiedzi są reprezentowane przez wektory pokazujące rozkład ocen wszystkich uczestników badania i stopień niepewności odpowiedzi. Dane niekompletne są normalizowane metodą środka ciężkości. Następnie przypisuje się wartości użyteczności ocenom na skali porządkowej, oblicza macierz podobieństw oraz wyznacza rozwiązania idealne i anty-idealne. Odległości obiektów od tych punktów referencyjnych mierzone są za pomocą metryki opartej na wektorach rozkładów przekonań, a klasyfikacja odbywa się zgodnie z procedurą TOPSIS. Dodatkowo zaproponowano procedurę analizy stabilności rankingów dla różnych parametrów funkcji użyteczności, co pozwala na ocenę odporności wyników na zmiany tych parametrów.

Metodę tę zastosowano do oceny subiektywnej jakości życia mieszkańców 83 miast europejskich. W badaniu wykorzystano dane zebrane w 2023 roku przez IPSOS na zlecenie Komisji Europejskiej [1]. Respondenci oceniali poziom zadowolenia z różnych aspektów życia miejskiego, takich jak transport publiczny, opieka zdrowotna, infrastruktura sportowa, kulturalna i edukacyjna, tereny zielone, przestrzeń publiczna, jakość powietrza, klimat akustyczny oraz

czystość miasta. W badaniu wykorzystano czterostopniową skalę ocen (bardzo niezadowolony, raczej niezadowolony, raczej zadowolony, bardzo zadowolony) z dodatkową opcją „nie wiem/brak odpowiedzi/odmowa odpowiedzi”. Wyniki badania wykazały istotne różnice w postrzeganej jakości życia zarówno między miastami, jak i w obrębie poszczególnych krajów. Najwyższe oceny uzyskiwały Zurych i Groningen, natomiast na końcu rankingu znalazły się Tirana, Skopje i Palermo.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr WZ/WI-IIT/2/25 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki oraz w ramach programu „Regionalna Inicjatywa Doskonałości” (RID/SP/0034/2024/01) finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

MSC (2020): 91B06, 62P25

Literatura

- [1] L. De Dominicis, F. Berlingieri, B. d’Hombres, C. Gentile, C. Mauri, E. Stepanova, N. Pontarollo, *Report on the Quality of Life in European Cities*, European Commission (Eds.), Publications Office: Luxembourg, 2024.
- [2] E. Roszkowska, T. Wachowicz, *Smart Cities and Resident Well-Being: Using the BTOPSIS Method to Assess Citizen Life Satisfaction in European Cities*, Appl. Sci., 2024, 14, 11051.

Struktury algebraiczne i kombinatoryka

Równania diofantyczne z funkcją silnia

Maciej Gnatowski

Politechnika Białostocka

e-mail: 77932@student.pb.edu.pl

Interesującą klasę równań diofantycznych stanowią te, w których pojawia się funkcja silnia. Klasycznym przykładem jest równanie Brocarda-Ramanujana $n! + 1 = k^2$. Choć było badane już od XIX wieku, do dziś nie wiadomo, czy jedynymi jego rozwiązaniami są trzy pary liczb naturalnych

$$(n, k) = (4, 5), (5, 11), (7, 71),$$

a nawet czy rozwiązań jest tylko skończenie wiele.

Na szczególną uwagę zasługują równania diofantyczne zawierające zarówno silnie, jak i wyrażenia wykładnicze. Szybki wzrost i nieregularność występujących w nich składników sprawiają, że często trudno jest odpowiedzieć na pytanie, czy rozwiązując dane równanie, faktycznie wyczerpaliśmy wszystkie możliwości.

W referacie skupię się na dwóch bliźniaczych równaniach:

$$(n!)^k - n^k = (k!)^n - k^n \quad \text{oraz} \quad (n!)^k + n^k = (k!)^n + k^n.$$

W pracy [1] pokazano, że poza trywialnym przypadkiem $n = k$ oraz wyjątkami $(n, k) = (1, 2), (2, 1)$ w pierwszym równaniu, równania te nie mają innych rozwiązań. Zaprezentuję alternatywny, oparty na nierównościach, dowód tego faktu [2]. Dodatkowo rozważona zostanie nierówność związana z pierwszym równaniem: $(n!)^k - n^k(n-1)^k > (k!)^n - k^n$.

MSC (2020): 11D61

Literatura

- [1] H. Alzer, F. Luca, *Diophantine equations involving factorials*, Math. Bohem., 2017, 142(2), 181–184.
- [2] M. Gnatowski, *On some diophantine equations involving factorials*, Math. Bohem., <https://mbpapers.math.cas.cz/full/online1st/MB.2025.0043-25.pdf>.

Anihilatory w pierścieniach łącznych

Małgorzata Jastrzębska

Uniwersytet w Siedlcach

e-mail: malgorzata.jastrzebska@uws.edu.pl

Niech R będzie pierścieniem łącznym z $1 \neq 0$. Z pierścieniem R możemy związać różne kraty, np. kratę ideałów lewostronnych $I_l(R)$, kratę ideałów prawostronnych $I_r(R)$, kratę ideałów dwustronnych $I(R)$ (zob. [1, 2]). W zbiorze $I_l(R)$ wyróżnia się pewne elementy znane jako lewostronne anihilatory. Przez lewostronny anihilator niepustego podzbioru S w R rozumiemy zbiór

$$l(S) = \{r \in R \mid rS = 0\}.$$

Prawostronny anihilator zbioru S definiujemy analogicznie. Zbiór $A_l(R)$ wszystkich lewostronnych anihilatorów w R z relacją inkluzji tworzy kratę zupełną

i ograniczoną, ale nie jest to na ogół podkrata w kracie $I_l(R)$. Podobna sytuacja dotyczy prawostronnych ideałów i prawostronnych anihilatorów. Wiadomo np. z [5], że kraty $A_l(R)$ oraz $A_r(R)$ nie muszą być modularne.

Celem referatu jest charakteryzacja pierścieni dla których krata lewostronnych (analogicznie prawostronnych) anihilatorów ma pewne specyficzne własności [3, 4].

MSC (2020): 16P60, 16P10

Literatura

- [1] R.L. Blair, *Ideal lattices and the structure of rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, 136–153.
- [2] H. Draskovicova, T. S. Fofanova, V. I. Igoshin, T. Katriniak, M. Kolibiar, N. Y. Komarnitskii, A. V. Mikhalev, B. N. Sali, L. A. Skorniyakov *Ordered Sets and Lattices II*. Amer. Math. Soc Transl. Ser. 2, Vol 152, Amer. Mat. Soc, Providence, 1992.
- [3] M. Jastrzębska, *Rings with Boolean lattice of one-sided annihilators*, Symmetry, 2021, 13(10), 1909.
- [4] M. Jastrzębska, *On the conditions under which an algebra over a field has a multiplicative identity element*, Symmetry, 2025, 17, 1128.
- [5] M. Jastrzębska, J. Krempa, *On lattices of annihilators*, Contemp. Math., 2015, 634, 189–196.

Liczby miłe a liczby Sophie Germain

Krzysztof Kowitz

Uniwersytet Gdański

e-mail: krzysztof.kowitz@ug.edu.pl

Opowiem o ostatnio uzyskanych wynikach dotyczących liczb miłych i liczb Sophie Germain w oparciu o moją ostatnio opublikowaną pracę [1] oraz o pracę Paolo Leonettiego [2], w której zostało wprowadzone pojęcie liczby miłej. Liczba naturalna $n \geq 2$ jest miła wtedy i tylko wtedy, gdy $\{1^{\sigma(1)}, \dots, n^{\sigma(n)}\}$ jest pełnym układem reszt modulo n dla jakiejś permutacji σ zbioru $\{1, \dots, n\}$. Przedstawię pewne własności liczb miłych oraz odpowiem na hipotezę postawioną w pracy Paolo, która brzmi: Liczba naturalna $n \geq 11$ jest miła wtedy i tylko wtedy, gdy n lub $\frac{1}{2}n$ jest bezpieczną liczbą pierwszą.

MSC (2020): 05A05

Literatura

- [1] K. Kowitz, *Generalized "Riesel" numbers and nice numbers*, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, 2450104 (Online Ready).
- [2] P. Leonetti, *A characterization of Sophie Germain primes*, Int. J. Number Theory, 2018, 14(3), 653–660.

Uporządkowane półgrupy ternarne

Ryszard Mazurek

Politechnika Białostocka

e-mail: r.mazurek@pb.edu.pl

Półgrupą ternarną nazywamy niepusty zbiór S z działaniem trójargumentowym $S \times S \times S \ni (x, y, z) \mapsto xyz \in S$, które spełnia warunek łączności:

$$(abc)de = a(bcd)e = ab(cde) \quad \text{dla dowolnych } a, b, c, d, e \in S.$$

Jeżeli $\leq$ jest porządkiem częściowym w S zgodnym z tym działaniem, to S wraz z $\leq$ nazywamy *uporządkowaną półgrupą ternarną*. Jeżeli ponadto jej ideały prawostronne tworzą łańcuch względem inkluzji, to mówimy, że jest ona *prawostronnie łańcuchowa*. Takie półgrupy ternarne stanowią naturalny odpowiednik znanych z literatury uporządkowanych półgrup prawostronnie łańcuchowych, które z kolei obejmują półgrupy multiplikatywne pierścieni prawostronnie łańcuchowych.

W referacie przedstawione zostaną ogólne wiadomości na temat (uporządkowanych) półgrup ternarnych i ich ideałów [5]. Omówiona będzie klasyfikacja tzw. *segmentów pierwszych*, czyli par sąsiednich ideałów całkowicie pierwszych, w prawostronnie łańcuchowych uporządkowanych półgrupach ternarnych. Jak pokazano w [4], każdy taki segment jest któregoś z czterech typów: prosty, archimedesowy, wyjątkowy lub uzupełniający. Klasyfikacja ta jest analogiczna do tej znanej dla półgrup binarnych [2, 3], przy czym ujęcie ternarne wymagało nowych metod konstruowania ideałów pewnych typów (np. półpierwszych, idempotentnych). Zostaną również przedstawione motywacje do badania segmentów pierwszych, mające swoje źródło w teorii pierścieni łańcuchowych (np. [1]).

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr WZ/WI-IIT/2/2025 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 20N10, 20N15, 06F05

Literatura

- [1] H.H. Brungs, G. Törner, *Primes and completions of right chain rings*, Abelian groups and modules (Colorado Springs, CO, 1995), 203–210. Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 182 Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [2] T. Changphas, P. Luangchaisri, R. Mazurek, *On right chain ordered semigroups*, Semigroup Forum, 2018, 96(3), 523–535.
- [3] M. Ferrero, R. Mazurek, A. Sant'Ana, *On right chain semigroups*, J. Algebra, 2005, 292(2), 574–584.
- [4] R. Mazurek, S. Kar, A. Roy, *Semiprime ideals and prime segments of ordered ternary semigroups*, preprint.
- [5] F.M. Sioson, *Ideal theory in ternary semigroups*, Math. Japon., 1965, 10, 63–84.

Twierdzenie Wagnera-Prestona**Adam Michałowski**

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: am84747@student.uwb.edu.pl

Półgrupa inwersyjna to półgrupa S , w której dla każdego elementu $x \in S$ istnieje dokładnie jeden element odwrotny, tzn. element $y \in S$ spełniający równania $x = xyx$ oraz $y = yxy$. Klasycznym przykładem takiej struktury jest półgrupa wszystkich przekształceń częściowych danego zbioru. W referacie zaprezentuję własności półgrup inwersyjnych oraz przedstawię twierdzenie Wagnera–Prestona, będące odpowiednikiem twierdzenia Cayleya dla grup, dotyczące reprezentacji półgrup inwersyjnych jako półgrup częściowych bijekcji [2]. Ponadto omówię związek półgrup inwersyjnych z pierścieniami abelowymi, czyli pierścieniami, w których elementy idempotentne są centralne [1].

MSC (2020): 20M18, 20M20**Literatura**

- [1] M.E. Hryniewicka, M. Jastrzębska, *On some generalizations of the reversibility in nonunital rings*, J. Korean Math. Soc., 2019, 56(2), 289–309.

[2] M.V. Lawson, *Introduction to inverse semigroups*, ArXiv:2304.13580.

Kombinatoryka w wolnej probabilistyce

Wojciech Młotkowski

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: wojciech.mlotkowski@math.uni.wroc.pl

Wolna probabilistyka została zapoczątkowana pracą Voiculescu z 1985 roku i jest niekomutatywną wersją rachunku prawdopodobieństwa. Nie mamy tu zbioru Ω tylko zespoloną nieprzemienią $*$ -algebrę $\mathcal{A}$ zmiennych losowych, wraz z ustalonym funkcjonałem $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, który pełni rolę wartości oczekiwanej. Wolna niezależność jest związana z iloczynem wolnym algebr i prowadzi do operacji splotu wolnego miar probabilistycznych na $\mathbb{R}$. Splot ten można opisać kombinatorycznie przy pomocy wolnych kumulant.

Dokładniej, rodzinę π niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru X nazywamy *partycją zbioru X* jeśli $\bigcup \pi = X$. Jeśli dodatkowo X jest linowo uporządkowany to partycję π nazywamy *nieprzecinającą się* jeśli zachodzi implikacja:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \quad x_1, x_3 \in U \in \pi, \quad x_2, x_4 \in V \in \pi \implies U = V.$$

Jeśli $|X| = n$ to liczba nieprzecinających się partycji X jest równa liczbie Catalana $\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$.

Niech μ będzie miarą probabilistyczną na $\mathbb{R}$ o nośniku zwartym. Definiujemy *momenty μ* :

$$s_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

Następnie definiujemy dwa ciągi: *klasyczne kumulanty* $\kappa_n^c(\mu)$, oraz *wolne kumulanty* $\kappa_n^f(\mu)$ miary μ , poprzez następujące relacje:

$$s_n(\mu) = \sum_{\pi \in P(n)} \prod_{V \in \pi} \kappa_n^c(\mu), \quad s_n(\mu) = \sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{V \in \pi} \kappa_n^f(\mu),$$

gdzie $P(n)$ (odpowiednio: $NC(n)$) oznacza rodzinę wszystkich partycji (odpowiednio: wszystkich partycji nieprzecinających się) zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas

jeśli μ, ν są miarami probabilistycznymi na $\mathbb{R}$ o nośnikach zwartych, to ich splot klasyczny $\mu * \nu$ i splot wolny $\mu \boxplus \nu$ jest jedyną miarą, która spełnia

$$\kappa_n^c(\mu * \nu) = \kappa_n^c(\mu) + \kappa_n^c(\nu), \quad \kappa_n^f(\mu \boxplus \nu) = \kappa_n^f(\mu) + \kappa_n^f(\nu)$$

dla $n = 1, 2, \dots$, odpowiednio.

W swoim referacie chcę zaprezentować kombinatoryczne aspekty wolnej probabilistyki. Bardziej zainteresowanym polecam książkę [2]. Od kilku lat jest też rozwijana skończona wersja wolnej probabilistyki, szczególnie można znaleźć w pracy [1].

MSC (2020): 46L54, 60C05

Literatura

- [1] A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava, *Finite free convolutions of polynomials*, Probab. Theory Related Fields, 2022, 182, 807–848.
- [2] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 335 Cambridge University Press, 2006.
- [3] D. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^* -algebras*, Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, Busteni, 1983, 556–588, Lecture Notes in Math., 1132, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

Uogólnienia skończonych krat modularnych

Agnieszka Stocka

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: stocka@math.uwb.edu.pl

Niech L będzie kratą skończoną oraz $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset L \setminus \{1\}$. Powiemy, że X jest:

- *zbiorem niezależnym* w kracie L , jeśli dla każdego $1 \leq i \leq n$ spełniony jest warunek

$$\left(\bigwedge_{j \neq i} x_j \right) \vee x_i = 1,$$

- *zbiorem ciągowo niezależnym (s -niezależnym)* w kracie L , jeśli dla każdego $1 < i \leq n$ spełniony jest warunek

$$\left(\bigwedge_{j < i} x_j \right) \vee x_i = 1.$$

Kratę L nazwiemy *dualnie zrównoważoną*, jeśli dowolny ciągowo niezależny podzbiór L jest niezależny. Kratę L nazwiemy *M-kratą*, jeśli dowolny ciągowo niezależny podzbiór złożony z atomów dualnych kraty L jest niezależny. Dowolna krata modułarna jest kratą dualnie zrównoważoną, a dowolna krata dualnie zrównoważona jest *M-kratą*.

Celem referatu jest przedstawienie tych własności krat modułarnych, które dają się przenieść na zdefiniowane powyżej klasy krat oraz własności zbiorów niezależnych w takich kratach.

Rezultaty dotyczące zbiorów niezależnych w kratach modułarnych możemy znaleźć w pracy [1]. Pojęcia i własności krat dualnie zrównoważonych i *M-krat* przedstawione są m. in. w pracach [2] i [3].

MSC (2020): 06C05, 08A05

Literatura

- [1] P. Grzeszczuk, E. R. Puczyłowski, *On Goldie and dual Goldie dimensions*, J. Pure Appl. Algebra, 1984, 31, 47–54.
- [2] J. Krempa, B. Terlikowska-Osłowska, *On uniform dimension of lattices*, Contributions to general algebra (Linz), 1994, 9, 219–230.
- [3] A. Stocka, *On generalization of modular lattices*, Bull. Sect. Log., ukaze się.

Magmy antyłączne w algebrze obliczeniowej

Kamil Zabielski

Politechnika Białostocka

e-mail: kamil.zabielski@pb.edu.pl

Niepusty zbiór $\mathcal{S}$ z dwuargumentowym działaniem $*$ nazwiemy *magmą*. Jeśli dodatkowo dla dowolnych $a, b, c \in \mathcal{S}$ zachodzi $(a * b) * c \neq a * (b * c)$, to powiemy, że $\mathcal{S}$ jest *magmą antyłączną*.

Podczas referatu przedstawimy własności magm antyłącznych oraz ich klasyfikację z użyciem grafów. Wyniki teoretyczne [1, 2, 3] przepleciemy elementami algebry obliczeniowej. Omówimy metody eksploracji strukturalnych i kombinatorycznych własności małych magm antyłącznych, korzystając z biblioteki *smallantimagmas* [4] w systemie GAP [5].

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr WZ/WI-IIT/2/2025 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 05C25, 05E99, 20N02, 68W30

Literatura

- [1] D.R. Rogers, *Anti-associative systems*, 1963, All Graduate Theses and Dissertations, 6800.
- [2] R. Mazurek, K. Zabielski, *Deranged and anti-associative magmas*, preprint.
- [3] R. Mazurek, *Antiassociative magmas*, Ann. Mat. Pura Appl., 2025, 204(3), 925–941.
- [4] K. Zabielski, R. Mazurek, *A library of antimagmas of small order – smallantimagmas*, <https://github.com/gap-packages/smallantimagmas>.
- [5] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.14.1*, <https://www.gap-system.org/>.

Struktury geometryczne i układy całkowlne

Zastosowanie algebr Clifforda i grup Spin do układów całkowlnych

Jan Leszek Cieřliński

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: j.cieslinskia@uwb.edu.pl

Omówiona zostanie szeroka klasa problemów liniowych (par Laxa) o wartościach w algebrach Clifforda, prowadzących (poprzez odpowiednie uogólnienie wzoru Syma) do interesujących klas wielowymiarowych podrozmaitości, związanych z układami całkowlnych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych (będących równaniami Gaussa-Codazzi-Ricci dla tych podrozmaitości).

Impulsem do rozwoju tej tematyki (inspirującym także dla kilku innych grup badawczych) było znalezienie pary Laxa związanej z powierzchniami izotermicznymi [4], najpierw wykorzystując grupy $SO(4,1)$ czy $SP(2,2)$, a następnie formułując to w bardziej elegancki sposób przy użyciu algebry Clifforda i grupy Spin $(4,1)$. Zastosowanie formuły Syma nie prowadzi bezpośrednio do uzyskania powierzchni izotermicznych. Zamiast tego otrzymuje się podrozmaitości o zerowej krzywiznie zanurzone w przestrzeni 6-wymiarowej. Dopiero rzutowanie

na odpowiednie podprzestrzenie 3-wymiarowe daje parę powierzchni izotermicznych (są to powierzchnie dualne, znane też jako transformaty Christoffela). W ten sposób klasyczna teoria powierzchni izotermicznych, stworzona przez Bianchi'ego i Darboux, została sformułowana w języku problemów spektralnych nowoczesnej teorii solitonów.

Początkowo postać macierzowa była niezbędna przy konstrukcji transformacji Darboux-Bäcklunda (generującej nowe powierzchnie i ściśle rozwiązania równań nieliniowych). Dopiero praca [1] wskazała kierunek, w którym należy szukać uogólnienia transformacji Darboux nie wymagającego reprezentacji macierzowej.

Naturalne jest rozważenie różnych innych algebr Clifforda i grup Spin, a także różnych form zależności od parametru spektralnego. Na przykład dla grupy Spin(3) otrzymujemy klasyczną teorię powierzchni pseudosferycznych, a grupa Spin(2n) prowadzi do n -wymiarowych podrozmiarowości o stałej krzywiznie sekcijnej zanurzonych w R^{2n-1} [2].

Ciekawym, ale stosunkowo trudnym problemem jest konstrukcja transformacji Darboux-Bäcklunda w poszczególnych przypadkach [3, 5]. Grupy redukcji (grupy pętlowe) macierzowych par Laxa mogą zostać wyrażone w języku inwolucji odpowiednich algebr Clifforda. Wartości własne parametryzujące ściśle rozwiązania (solitony), zazwyczaj będące zerami pewnych wyznaczników, okazują się być zerami odpowiednich norm spinorowych.

W referacie zostaną także zwięźle przedstawione najnowsze wyniki związane z transformacją Darboux dla par Laxa w algebrach Clifforda, a także problemy związane z całkowalną dyskretyzacją tych układów.

MSC (2020): 15A67, 37K25, 37K35

Literatura

- [1] W. Biernacki, J.L. Cieśliński, *A compact form of the Darboux-Bäcklund transformation for some spectral problems in Clifford algebras*, Phys. Lett. A, 2001, 288, 167–172.
- [2] J.L. Cieśliński, *Geometry of submanifolds derived from Spin-valued spectral problems*, Theor. Math. Phys., 2003, 137, 1394–1403.
- [3] J.L. Cieśliński, *Darboux-Bäcklund Transformations for Spin-Valued Linear Problems*, in: N.B. Paranjape et al. (eds.), *Quantum Theory and Symmetries*, 37–46, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, Cham, 2021.
- [4] J.L. Cieśliński, P. Goldstein, A. Sym, *Isothermic surfaces in E^3 as soliton surfaces*, Phys. Lett. A, 1995, 205, 37–43.

- [5] J.L. Cieśliński, Z. Hasiewicz, *Iterated Darboux Transformation for Isothermic Surfaces in Terms of Clifford Numbers*, *Symmetry*, 2021, 13, 148.

Nowe spojrzenie na algebry Liego

Alina Dobrogowska

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: alina.dobrogowska@uwb.edu.pl

W referacie tym zostanie przedstawione nowe podejście do budowy struktur algebraicznych takich jak algebroidy Liego i ich szczególny przypadek algebry Liego. Podstawowym składnikiem jest para (F, ν) składająca się z odwzorowania liniowego $F \in \text{End}(V)$ z ustalonym wektorem własnym ν . Para ta umożliwia zbudowanie nawiasu Liego na przestrzeni dualnej do przestrzeni liniowej V . Algebra Liego uzyskana w ten sposób jest rozwiązalna. Pokazujemy, że te algebry (pary) są podstawowymi cegiełkami w konstrukcji dowolnej algebry Liego. Wyniki te zostały opublikowane w pracach [1, 2, 3].

MSC (2020): 17B05, 17B30

Literatura

- [1] D. Beltita, A. Dobrogowska, G. Jakimowicz, *Cyclic Lie-Rinehart algebras*, *J. Algebra Appl.*, DOI: [10.1142/S0219498826502786](https://doi.org/10.1142/S0219498826502786).
- [2] A. Dobrogowska, G. Jakimowicz, *Generalization of the concept of classical r -matrix to Lie algebroids*, *J. Geom. Phys.*, 2021, 165, 1–15.
- [3] A. Dobrogowska, G. Jakimowicz, *A new look at Lie algebras*, *J. Geom. Phys.*, 2023, 192, 104959.

Dziwne własności nawiasów Poissona na rozmaitościach Banacha

Tomasz Goliński

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: tomaszg@math.uwb.edu.pl

Geometria nieskończenie wymiarowa w wydaniu banachowskim dopuszcza wiele sytuacji, które nie mają miejsca w przypadku skończenie wymiarowym.

Przykładowo: znikanie tensora Nijenhuisa dla struktury niemal zespolonej nie gwarantuje automatycznie jej całkowalności w przypadku C^∞ (nie zachodzi twierdzenie Newlandera–Nirenberga). W tym kontekście nie pracują również argumenty oparte na wymiarze obrazu/jądra. Z tego powodu niezdegenerowana 2-forma nie zawsze zadaje izomorfizm między włóknami wiązki stycznej i kostycznej. Prowadzi to do konieczności odróżnienia silnych i słabych form symplektycznych i metryk riemannowskich. Zachowanie nawiasów Poissona na takich rozmaitościach było badane w pracy [3]. W pracy [1] udowodniono, że istnieją także patologiczne nawiasy Poissona (spełniające regułę Leibniza), które nie są zadane polem biwektorowym (tensorem Poissona) i zależą od pochodnych wyższego rzędu. Wymusiło to doprecyzowanie definicji rozmaitości Poissona podanej w [3]. Ponadto, konkretne przykłady często nie mieszczą się w ramach definicji z pracy [3]. Z tego powodu wielu autorów zmuszonych było rozluźnić niektóre warunki narzucane w tej definicji, wprowadzając własne definicje uogólnionych (lub słabych) struktur Poissona. W pracy [2] przeanalizowano dostępne w literaturze definicje i związki między nimi. Przykładową sytuacją wymagającą zmienionych definicji jest teoria banachowskich grup Poissona–Liego.

MSC (2020): 46T05, 53D17, 58B20

Literatura

- [1] D. Beltiță, T. Goliński, A.B. Tumpach, *Queer Poisson brackets*, J. Geom. Phys., 2018, 132, 358–362.
- [2] T. Goliński, P. Rahangdale, A.B. Tumpach, *Poisson structures in the Banach setting: comparison of different approaches*, arXiv:2412.05391.
- [3] A. Odziejewicz, T.S. Ratiu, *Banach Lie–Poisson spaces and reduction*, Comm. Math. Phys., 2003, 243(1), 1–54.

Banachowskie algebroidy Liego, a liniowe struktury Poissona na banachowskich wiązkach wektorowych

Grzegorz Jakimowicz

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: g.jakimowicz@uwb.edu.pl

Omówiony zostanie związek między banachowskimi algebroidami Liego i liniowymi strukturami Poissona na banachowskich wiązkach wektorowych. Za-

prezentowana będzie m.in. konstrukcja liniowej struktury Poissona na wiązce predualnej do banachowskiego algebroidu Liego. Pokazane zostanie także, że liniowa struktura Poissona na banachowskiej wiązce wektorowej zadaje strukturę banachowskiego algebroidu Liego na wiązce dualnej. Rozważana będzie też kanoniczna słabo-symplektyczna forma na wiązce pre-kostycznej i jej związek z nawiasem Poissona indukowanym strukturą algebroidową wiązki stycznej.

Referat ten opiera się na wspólnej z Tomaszem Golińskim pracy [1].

MSC (2020): 53-XX, 46-XX

Literatura

- [1] Tomasz Goliński, Grzegorz Jakimowicz, *Poisson structure on predual of Banach Lie algebroid*, ArXiv:2505.13351.

Struktury geometryczne związane z W^* -algebrą

Aneta Sliżewska

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: anetasl@uwb.edu.pl

Grupoid pojawia się w naturalny sposób jako rodzina izomorfizmów zadanych między włóknami wiązki wektorowej. Składanie izomorfizmów (tam, gdzie ma to sens) jest łączne, a złożenie danego izomorfizmu z izomorfizmem do niego odwrotnym daje odwzorowanie identycznościowe odpowiednio na włóknie inicjalnym lub finalnym. Jeżeli od rozpatrywanych struktur zażądamy dodatkowych własności, np. topologicznych, gładkości, Poissona, możemy mówić o grupoidzie topologicznym, Liego, lub grupoidzie poissonowskim? Wystąpienie ma na celu prezentację grupoidów które w naturalny sposób pojawiają się w algebrze von Neumana oraz ich charakteryzację jako nietrywialnych przykładów grupoidów banachowskich.

MSC (2020): 22A22, 47C15, 58H05

Literatura

- [1] T. Goliński, G. Jakimowicz, A. Sliżewska, *Banach Lie groupoid of partial isometries over the restricted Grassmannian*, Anal. Math. Phys., 2025, 15, 1–14.

- [2] K. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, Cambridge University Press, 2005.
- [3] A. Odziejewicz, G. Jakimowicz, A. Sliżewska, *Banach-Lie algebroids associated to the groupoid of partially invertible elements of a W^* -algebra*, J. Geom. Phys., 2015, 95, 108–126.
- [4] A. Odziejewicz, G. Jakimowicz, A. Sliżewska, *Fibre-wise linear Poisson structures related to W^* -algebras*, J. Geom. Phys., 2018, 123, 385–423.
- [5] A. Odziejewicz, A. Sliżewska, *Banach Lie groupoids associated to W^* -algebra*, J. Sympl. Geom., 2016, 14(3) 687–736.

Funkcje Casimira algebr Liego

Marzena Szajewska

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: m.szajewska@math.uwb.edu.pl

Przedstawiamy nowe podejście do opisu funkcji Casimira algebr Liego, oparte na analizie par (F_i, v_i) , gdzie F_i jest odwzorowaniem liniowym z zadanyim wektorem własnym v_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Metoda ta pozwala skonstruować dowolną skończoną wymiarową algebrę Liego oraz wyznaczyć funkcje Casimira. Podajemy szereg kryteriów pozwalających opisać ilość i postać funkcji Casimira w języku rozkładalności tensora zbudowanego z par (F_i, v_i) . Całość zostanie zobrazowana na wielu przykładach.

MSC (2020): 16S30, 17B99

Literatura

- [1] A. Dobrogowska, G. Jakimowicz, *A new look at Lie algebras*, Journal of Geometry and Physics, 2023, 192, 104959.
- [2] A. Dobrogowska, M. Szajewska *Eigenvalue problem versus Casimir functions for Lie algebras*, Analysis and Mathematical Physics, 2024, 14–33.
- [3] L. Snobl, P. Winternitz, *Classification and identification of Lie algebras*, in: CRM Monograph Series, vol. 33, AMS, 2014.

Struktury incydencyjne, geometrie skończone, teoria kodów

Nowa metoda zapisu i badania wybranych własności grafów nieskierowanych

Paweł Chłosta

Akademia Humanistyczno-Ekonomiczna w Łodzi

e-mail: pchlosta@ahelodz.pl

Pierwszym celem wystąpienia jest przedstawienie nowej metody zapisu dowolnych grafów nieskierowanych, opartej o logikę binarną [1] i algebrę binarną [2]. Metoda ta została opracowana w połowie 2024 roku przez absolwenta Politechniki Warszawskiej Błażeja Strusa.

Dzięki tej metodzie można w sposób jednoznaczny zapisać dowolny graf nieskierowany, używając ścisłych, binarnych wzorów funkcyjnych logicznych alternatywy i koniunkcji w postaci dyskretnych funkcji OTA. Przykłady wzorów wybranych grafów znajdują się w [3].

Drugim celem wystąpienia jest zaprezentowanie nowej, uniwersalnej metody badania izomorficzności grafów, a także omówienie różnic pomiędzy logicznym a algebraicznym sumowaniem grafów.

MSC (2020): 05C60

Literatura

[1] P. Chłosta, *Logika Binarna. Tautologie*, BinaryMath, 2024.

[2] P. Chłosta, *Fundamentals of Binary Algebra*, Second Edition, BinaryMath, 2022.

[3] B. Strus, P. Chłosta, *Wzory binarne grafów nieskierowanych*, BinaryMath, 2025.

Geometria binarnych sympleks kodów i kwadratowe konfiguracje kombinatoryczne

Krzysztof Petelczyc

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: kryzpet@math.uwb.edu.pl

Punkty przestrzeni rzutowej $PG(n-1, 2)$ możemy w naturalny sposób utożsamić z niepustymi podzbiorami zbioru $\{1, \dots, n\}$. Rozważmy geometrię $\mathcal{P}_m(n)$ utworzoną przez punkty odpowiadające $2m$ -elementowym podzbiorom tego zbioru. W przypadku gdy $n = 2k - 1$ oraz $m = 2k - 2$ dla pewnej liczby całkowitej $k \geq 3$, maksymalne singularne podprzestrzenie tej geometrii odpowiadają binarnym sympleksom kodom wymiaru k .

Dla $k \geq 4$ graf współliniowości geometrii $\mathcal{P}_m(n)$ zawiera maksymalne kliki, które nie powstały z maksymalnych singularnych podprzestrzeni. Jeśli maksymalna klika zawiera dokładnie n elementów, to określa kwadratową $(n, 2m, m)$ -konfigurację kombinatoryczną. Gdy taka klika powstała z maksymalnej singularnej podprzestrzeni, odpowiadająca jej konfiguracja jest izomorficzna z konfiguracją złożoną z punktów i dopełnień hiperpłaszczyzn w przestrzeni $PG(k-1, 2)$.

Wyróżniamy klasę tzw. maksymalnych centralnych klik, które otrzymujemy sumując $2^{k-1} - 1$ prostych przechodzących przez ustalony punkt – centrum. Centralne kliki możemy skonstruować przy pomocy bijekcji między dwoma $(2m-1)$ -elementowymi maksymalnymi klikami geometrii $\mathcal{P}_{m/2}(2m-1)$. W przypadku $k = m = 4$ geometria $\mathcal{P}_{m/2}(2m-1) = \mathcal{P}_2(7)$ jest przestrzenią biegunową rzędu 3 i każda maksymalna klika grafu współliniowości jest płaszczyzną Fano. Głównym wynikiem jest klasyfikacja maksymalnych centralnych 15-elementowych klik grafu współliniowości $\mathcal{P}_4(15)$, którą otrzymujemy badając możliwe bijekcje płaszczyzny Fano. Ta klasyfikacja, razem z konstrukcją niecentralnej maksymalnej 15-elementowej kliki, stanowi geometryczną interpretację wszystkich pięciu kwadratowych $(15, 8, 4)$ -konfiguracji kombinatorycznych.

MSC (2020): 51E20, 51E22

Automorfizmy geometrii związanych z binarnymi kodami o stałej odległości

Mariusz Żynel

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: mariusz@math.uwb.edu.pl

Znane są dwa pojęcia równoważności kodów. Dwa kody C_1, C_2 w przestrzeni wektorowej V nad ciałem skończonym są równoważne, gdy, albo istnieje półliniowy izomorfizm zachowujący wagę Hamminga, który przekształca C_1 na C_2 , albo, gdy istnieje transformacja jednomianowa przestrzeni V , która przekształca C_1 na C_2 . Twierdzenie MacWilliams o rozszerzaniu mówi, że te dwa pojęcia są tożsame.

Rozważamy przestrzeń rzutową $\mathcal{P}(V)$ nad przestrzenią wektorową $V = \mathbb{F}_2^n$. Standardowa baza V to $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$. Dla każdego niezerowego wektora v z V mamy $v = e_I = \sum_{i \in I} e_i$, gdzie I jest niepustym podzbiorem zbioru $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Zauważmy, że i -ta współrzędna wektora e_I to 1, gdy $i \in I$, albo 0 w przeciwnym razie. Punkt z $\mathcal{P}(V)$ odpowiadający wektorowi e_I oznaczamy jako P_I . Jego waga Hamminga to $|I|$.

Niech teraz m będzie taką liczbą naturalną, że $3m \leq n$. Przez $\mathcal{P}_m$ oznaczmy zbiór punktów przestrzeni $\mathcal{P}(V)$ o wadze Hamminga $2m$. Zbiór $\mathcal{P}_m$ możemy traktować jako geometrię incydencyjną, której prostymi są proste przestrzeni rzutowej $\mathcal{P}(V)$ zawarte w $\mathcal{P}_m$. Odległość Hamminga pomiędzy dwoma różnymi, współliniowymi punktami w $\mathcal{P}_m$ jest stała i wynosi $2m$. W tej klasie geometrii znajduje się: konfiguracja Pascha ($n = 3m + 1 = 4$), konfiguracja Cremona-Richmond ($n = 3m = 6$) oraz przestrzeń biegunowa ($n = 4m - 1 = 7$).

Dowodzimy, że w pewnych nietrywialnych przypadkach, istnieją automorfizmy geometrii $\mathcal{P}_m$ wyznaczone przez półliniowe automorfizmy otaczającej przestrzeni V , które nie są jednomianowe (por. [1]).

MSC (2020): 51E20, 51E22

Literatura

- [1] M. Pankov, K. Petelczyc, M. Żynel, *Point-line geometries related to binary equidistant codes*, J. Combin. Theory Ser. A, 2025, 210, 1–30.

Teoria grup, pierścieni i ciał

Rozszerzenia pierścieni łącznych za pomocą pierścienia liczb całkowitych

Ryszard Romuald Andruszkiewicz

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: r.andruszkiewicz@uwb.edu.pl

W teorii pierścieni łącznych od dawna znane jest tzw. rozszerzenie Dorroha $D(R)$ pierścienia R polegające na dołączeniu jedynki do pierścienia R w taki sposób, że R jest ideałem w $D(R)$ i $D(R)/R \cong \mathbb{Z}$. W tym kontekście powstaje pytanie jak wyglądają (z dokładnością do izomorfizmu) wszystkie pierścienie S takie, że $R \triangleleft S$ oraz $S/R \cong \mathbb{Z}$?

Rozwiązanie tego problemu ma związek z klasyfikacją tzw. wiązarów, gdyż w pracy [2] odkryto zaskakujący związek między wiązarami i rozszerzeniami pierścieni za pomocą pierścienia liczb całkowitych $\mathbb{Z}$. Powstają też inne pytania związane z tym tematem:

- Kiedy wszystkie rozszerzenia danego pierścienia przemennego za pomocą pierścienia $\mathbb{Z}$ liczb całkowitych są pierścieniami przemiennymi?
- Czy z tego, że $D(A) \cong D(B)$ wynika, że $A \cong B$?

Na te i inne pytania postaramy się odpowiedzieć w naszym referacie.

MSC (2020): 16S70, 16D25, 08A99

Literatura

- [1] R.R. Andruszkiewicz, *Surprise at adjoining an identity to an algebra*, Vietnam Journal Math., 2021, 49(4), 1131–1133.
- [2] R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B. Rybołowicz, *Ideal ring extensions and trusses*, J. Algebra, 2022, 600, 237–278.

- [3] R.R. Andruszkiewicz, K. Pryszczepko, *On retracts determinating commutative trusses*, Internat. J. Algebra Comput., 2023, 33(3), 499–508.

Grupy relatywnie hiperboliczne: skończone podgrupy nieparaboliczne, problem rzędu i problem równań wykładniczych

Oleg Bogopolski

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: oleg.bogopolskiy@usz.edu.pl

Grupy relatywnie hiperboliczne zostały wprowadzone przez Gromova [4] jako uogólnienie grup hiperbolicznych. Przykładami takich grup są grupy podstawowe niezwartych rozmaitości Riemanna o skończonej objętości i o ujemnej krzywiznie ściśle ograniczonej, geometrycznie skończone grupy Kleina, grupy hiperboliczne oraz grupy małych skreśleń nad produktami wolnymi; szczegóły można znaleźć w pracy Osina [5].

W moim wystąpieniu krótko przedstawię to zagadnienie, a następnie omówię nasze najnowsze wyniki z [1, 2].

Niech G będzie grupą relatywnie hiperboliczną względem rodziny podgrup $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Zakładamy, że G jest zadana przez skończoną prezentację relatywną $\mathcal{P}$ względem tej rodziny.

(1) Przypomnijmy, że podgrupa F grupy G nazywa się *nieparaboliczna*, jeśli nie istnieje $\lambda \in \Lambda$ taka, że F jest sprzężona z podgrupą grupy H_λ . W pracy [2] podajemy górne ograniczenie rzędów skończonych nieparabolicznych podgrup grupy G w zależności od pewnych fundamentalnych stałych związanych z $\mathcal{P}$. To górne ograniczenie jest obliczalne, jeśli G jest skończenie generowana i problem słów w każdej podgrupie H_λ , $\lambda \in \Lambda$, jest rozstrzygalny. Wynik ten uogólnia rezultat Bogopolskiego i Gerasimova [3] dotyczący skończonych podgrup grup hiperbolicznych.

(2) Przypomnijmy, że *problem rzędu dla elementów* w grupie H polega na obliczeniu rzędu danego elementu grupy H . Warto zauważyć, że jeśli problem ten jest rozstrzygalny w H , to również problem słów w H jest rozstrzygalny. Odwrotne stwierdzenie nie zachodzi dla pewnych grup skończenie prezentowanych. Jako wniosek z punktu (1) przedstawiamy konkretny algorytm rozwiązujący problem rzędu w G , zakładając, że Λ jest skończona i problem rzędu jest rozwiązywalny w każdej H_λ , $\lambda \in \Lambda$.

(3) Niech $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ będzie przeliczalnym nieskończonym zbiorem zmiennych. Równanie wykładnicze nad grupą H to równanie postaci

$$a_1 g_1^{x_{t_1}} a_2 g_2^{x_{t_2}} \cdots a_n g_n^{x_{t_n}} = 1,$$

gdzie $a_1, g_1, \dots, a_n, g_n \in H$ oraz $x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$ są zmiennymi ze zbioru X (przyjmującymi wartości w $\mathbb{Z}$). Dopuszczamy, by niektóre zmienne się powtarzały. Jeśli wszystkie zmienne w równaniu są różne, mówimy, że równanie jest *rodzaju 1*.

W [1] podajemy algorytm rozwiązujący równania wykładnicze rodzaju 1 w relatywnie hiperbolicznych grupach G , zakładając, że G jest skończenie generowana i w każdej H_λ dostępne są odpowiednie algorytmy. Ponadto przedstawiamy przykład skończenie generowanej relatywnie hiperbolicznej grupy G , dla której istnieją algorytmy rozwiązujące równania wykładnicze w każdej H_λ , ale nie istnieje taki algorytm dla G .

MSC (2020): 20F65, 20F67, 20F10, 20F70

Literatura

- [1] A. Bier, O. Bogopolski, *Exponential equations in acylindrically hyperbolic groups*, 2021, arXiv:2106.11385v1
- [2] O. Bogopolski, *Finite non-parabolic subgroups of relatively hyperbolic groups*, J. Algebra, 2025, 677, 118–138.
- [3] O.V. Bogopolskii, V.N. Gerasimov, *Finite subgroups of hyperbolic groups*, Algebra Logic, 1995, 34, 343–345.
- [4] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory, Springer, New York, 1987, 75–263.
- [5] D. Osin, *Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems*, Memoirs Amer. Math. Soc., 2006, 179(843).

Skośne derywacje na rozszerzeniach pierścienia liczb całkowitych

Tomasz Brzeziński

Uniwersytet w Białymstoku

Swansea University

e-mail: t.brzezinski@uwb.edu.pl

Przez rozszerzenie pierścienia $\mathbb{Z}$ rozumiemy dokładny ciąg homomorfizmów pierścieni (bez jedynki) postaci:

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow S \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0;$$

(ściśle rzecz ujmując, S jest rozszerzeniem $\mathbb{Z}$ za pomocą ideału R). Jak pokazano w [1], rozszerzenia takie dają się całkowicie scharakteryzować przez pary endomorfizmów grupy addytywnej R , $\sigma = (\overrightarrow{\sigma}, \overleftarrow{\sigma})$ oraz stowarzyszone z nimi elementy $s \in R$ spełniające pewne warunki.

W referacie postaram się odpowiedzieć na następujące pytanie. Załóżmy, że α_R jest endomorfizmem pierścienia R , zaś δ_R jest skośną α_R -derywacją R , tj., dla wszystkich $a, b \in R$,

$$\delta_R(ab) = \delta_R(a)b + \alpha_R(a)\delta_R(b).$$

Jakie warunki spełniać muszą α_R i δ_R aby dały się podnieść do endomorfizmu α_S pierścienia S i skośnej α_S -derywacji δ_S ?

Prezentowane wyniki uzyskane zostały we współpracy z Alexandrem Westem (Swansea University).

MSC (2020): 16S70

Literatura

- [1] R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, B. Rybołowicz, *Ideal ring extensions and trusses*, J. Algebra, 2022, 600, 237–278.

Endomorfizmy przestrzeni liniowych nieskończonego wymiaru

Waldemar Hołubowski

Politechnika Śląska

e-mail: w.holubowski@polsl.pl

Niech $\mathfrak{gl}(V)$ będzie algebrą Liego endomorfizmów, a $GL(V)$ grupą automorfizmów przestrzeni liniowej V nad ciałem K .

Jeżeli $\dim(V)$ jest skończony, to krata ideałów w $\mathfrak{gl}(V)$ i krata podgrup normalnych w $GL(V)$ są bardzo podobne. Rezultaty te można uogólnić na nieskończone wymiary (patrz [2, 3, 4] dla przeliczalnego wymiaru i [1, 5] w ogólnym przypadku).

W naszym odczycie zreferujemy te wyniki.

MSC (2020): 17B60, 17B65, 20E07, 20H20

Literatura

- [1] O. Bezushchak, W. Hołubowski, B. Oliynyk, *Ideals of general linear Lie algebras of infinite-dimensional vector spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 2023, 151(2), 467–473.
- [2] W. Hołubowski, M. Maciaszczyk, S. Żurek, *Normal subgroups in the group of column-finite infinite matrices*, J. Group Theory, 2022, 25, 343–353.
- [3] W. Hołubowski, S. Żurek, *Lie algebra of column-finite infinite matrices: ideals and derivations*, J. Algebra 619, 2023, 517–537.
- [4] I. Penkov, V. Serganova, *Tensor representations of Mackey Lie algebras and their dense subalgebras*, Developments and retrospectives in Lie theory, Dev. Math., 2014, 38, 291–330.
- [5] A. Rosenberg, *The structure of the infinite general linear group*, Ann. of Math., 1958, 68(2), 278–294.

Klamry, wiązary, post-grupy

Małgorzata Hryniewicka

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: margitt@math.uwb.edu.pl

Klamry weszły już do kanonu pojęć matematycznych. Wiazary na stałe zagościły w świadomości algebraików. Ostatnio pojawiły się post-grupy. *Skośną lewostronną klamrą* $(B, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet)$ nazywamy grupę $(B, \circ, 1_\circ)$ wraz z operacją binarną $\bullet$ zadającą na B dodatkową strukturę grupy $(B, \bullet, 1_\bullet)$ i spełniającą lewostronną dystrybutywność w sensie

$$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ x^{-1_\circ} \circ (x \bullet z),$$

gdzie $x, y, z \in B$ oraz $x^{-1_\circ}$ oznacza element odwrotny do x w grupie $(B, \circ, 1_\circ)$, por. [4]. Dla grupy $(G, \circ, 1_\circ)$ operator $\mathcal{B}$ na G nazywamy *operatorem Rota-Baxtera*, jeżeli

$$\mathcal{B}(x) \circ \mathcal{B}(y) = \mathcal{B}(x \circ \mathcal{B}(x) \circ y \circ \mathcal{B}(x)^{-1_\circ}),$$

gdzie $x, y \in G$. Wtedy $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B})$ nazywamy grupą Rota-Baxtera. Operacja binarna $x \bullet y = x \circ \mathcal{B}(x) \circ y \circ \mathcal{B}(x)^{-1_\circ}$ zadaje na grupie Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B})$ strukturę skośnej lewostronnej klamry $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet = 1_\circ)$, por. [2].

Lewostronną post-grupą $(G, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ nazywamy grupę $(G, \circ, 1_\circ)$ wraz z operacją binarną $\triangleright$ przekształcającą każde lewostronne mnożenie $y \mapsto (x \triangleright y)$ w G w automorfizm grupy

$$x \triangleright (y \circ z) = (x \triangleright y) \circ (x \triangleright z),$$

gdzie $x, y, z \in G$, dla której operacja binarna $x \bullet y = x \circ (x \triangleright y)$ na G spełnia

$$(x \bullet y) \triangleright z = x \triangleright (y \triangleright z),$$

gdzie $x, y, z \in G$, por. [1]. Każdą lewostronną post-grupę $(G, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ przekształcimy w skośną lewostronną klamrę $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet = 1_\circ)$ definiując operację binarną $x \bullet y = x \circ (x \triangleright y)$ na G . Na odwrót, startując od skośnej lewostronnej klamry $(B, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet)$ przejdziemy do lewostronnej post-grupy $(B, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ definiując operację binarną $x \triangleright y = x^{-1_\circ} \circ (x \bullet y)$ na B .

Skośne lewostronne klamry mają strukturę skośnego lewostronnego wiązara. Skośnym lewostronnym wiązarem $(T, \circ, 1_\circ, \bullet, \sigma)$ nazywamy grupę $(T, \circ, 1_\circ)$ wraz z operacją binarną $\bullet$ zadającą na T strukturę półgrupy $(T, \bullet)$ oraz operatorem σ na T spełniającymi lewostronną dystrybutywność w sensie

$$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ \sigma(x)^{-1_\circ} \circ (x \bullet z),$$

gdzie $x, y, z \in T$, por. [3]. Systemem Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ nazywamy grupę $(G, \circ, 1_\circ)$ wraz z operatorami $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ na G spełniającymi

$$\mathcal{B}_1(x) \circ \mathcal{B}_1(y) = \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x))$$

$$\mathcal{B}_2(y) \circ \mathcal{B}_2(x) = \mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x)),$$

gdzie $x, y \in G$. Operacja binarna $x \bullet y = \mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x)$ oraz operator $\sigma(x) = \mathcal{B}_1(x) \circ \mathcal{B}_2(x)$ zadają na systemie Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ strukturę skośnego lewostronnego wiązara $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, \sigma)$, por. [5].

W [6] autor zdefiniował pojęcie słabej lewostronnej skróconej post-grupy, równoważne pojęciu skośnego lewostronnego wiązara. W trakcie wystąpienia przyjrzymy się także temu pojęciu.

MSC (2020): 17B38, 20N10, 20N99

Literatura

- [1] Ch. Bai, L. Guo, Y. Sheng, R. Tang, *Post-groups, (Lie-)Butcher group and Yang-Baxter equation*, Math. Ann., 2024, 388, 3127–3167.
- [2] V. Bardakov, V. Gubarev, *Rota-Baxter groups, skew left braces, and the Yang-Baxter equation*, J. Algebra, 2022, 596, 328–351.
- [3] T. Brzeziński, *Trusses: between braces and rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 2019, 372, 4149–4176.
- [4] L. Guarnieri, L. Vendramin, *Skew braces and the Yang-Baxter equation*, Math. Comp., 2017, 86, 2519–2534.
- [5] Z. Li, S. Wang, *Rota-Baxter systems and skew trusses*, J. Algebra, 2023, 623, 447–480.
- [6] S. Wang, *(Weak) twisted post-groups, skew trusses and rings*, arXiv:2307.10535.

Wielomianowe równania Pella postaci

$$P(x)^2 - (x^6 + ax^2 + b)Q(x)^2 = 1$$

Tomasz Jędrzejak

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: tjdrzejak@gmail.com

Wielomianowe równania Pella to równania funkcyjne będące odpowiednikiem diofantycznych równań Pella w pierścieniu wielomianów. Ich nietrywialne rozwiązania związane są z niestałymi jednościami w kwadratowych ciałach funkcyjnych. W odróżnieniu od diofantycznych równań Pella mogą one nie posiadać nietrywialnych rozwiązań. Właśnie głównym problemem jest badanie czy i kiedy istnieją takie nietrywialne rozwiązania.

W referacie najpierw przedstawię podstawowe własności wielomianowych równań Pella oraz wcześniejsze wyniki (np. [2]). Następnie opowiem o ostatnio uzyskanych wynikach wspólnie z doktorantem w oparciu o naszą ostatnią pracę [3]. W szczególności podam pełną charakteryzację rozwiązywalności tytułowych równań w pierścieniach $\mathbb{Q}[x]$ i $\mathbb{Z}[x]$ oraz jawne postacie rozwiązań.

MSC (2020): 11G10, 11C08, 14H40

Literatura

- [1] J.W.S. Cassels, E.V. Flynn, *Prolegomena to a Middlebrow Arithmetic of Curves of Genus 2*, Cambridge University Press, 1996.
- [2] T. Jędrzejak, *Polynomial Pell equations $P(x)^2 - (x^{2m} + ax + b)Q(x)^2 = 1$ and associated hyperelliptic curves*, J. Ramanujan Math. Soc., 2019, 34(2), 263–269.
- [3] T. Jędrzejak, M. Mionskowski, *Polynomial Pell equations with $D(x) = x^6 + ax^2 + b$* , 2025, w recenzji.

Skośne dwustronne klamerkoidy**Izabela Agata Malinowska**

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: i.malinowska@uwb.edu.pl

W referacie zostaną omówione uzyskane wyniki w oparciu o ostatnio opublikowaną pracę [2].

Isabel Martin-Lyons i Paul J. Truman [3] uogólnili definicję klamerki skośnej (skew brace), aby utworzyć nowy obiekt algebraiczny, który nazwali klamerkoidem skośnym (skew bracoid). Ich konstrukcja obejmuje dwie grupy oddziałujące na siebie w sposób analogiczny do warunku zgodności znajdującego się w definicji klamerki skośnej. Stworzyli narzędzia do charakteryzowania i klasyfikowania klamerkoidów skośnych oraz badali podstruktury i ilorazy klamerkoidów skośnych. Jako zastosowanie udowodnili, że skończone klamerkoidy skośne odpowiadają strukturom Hopfa-Galoisa na skończonych rozdzielczych rozszerzeniach ciał (finite separable extensions of fields), uogólniając istniejący związek między skończonymi klamerkami skośnymi a strukturami Hopfa-Galoisa na skończonych rozszerzeniach Galois. W pracy [2] badamy klamerkoidy dwustronne. Rump [4] pokazał, że jeśli lewostronna klamerka $(B, \star, \cdot)$ jest klamerką dwustronną, a działanie $\ast : B \times B \longrightarrow B$ jest zdefiniowane przez $a \ast b = a \cdot b \star \bar{a} \star \bar{b}$ dla wszystkich $a, b \in B$, to $(B, \star, \ast)$ jest pierścieniem radykalnym Jacobsona. Lau [1] pokazał, że jeśli $(B, \star, \cdot)$ jest lewostronną klamerką, a działanie $\ast$ jest łączne, to $(B, \star, \cdot)$ jest klamerką dwustronną. Udowodnimy odpowiedniki tych wyników w przypadku klamerkoidów.

MSC (2020): 16T25, 81R50

Literatura

- [1] I. Lau, *An associative left brace is a ring*, J. Algebra Appl., 2020, 19(09), 2050179.
- [2] I.A. Malinowska, *Skew two-sided bracoids*, Beitr. Algebra Geom, DOI: [10.1007/s13366-024-00765-8](https://doi.org/10.1007/s13366-024-00765-8).
- [3] I. Martin-Lyons, P.J.Truman, *Skew bracoids*, J. Algebra, 2024, 638, 751–787.
- [4] W. Rump. *Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equation*, J. Algebra, 2007, 307(1), 153–170.

Pierścienie, w których elementy nilpotentne tworzą podpierścień radykalny Wedderburna

Ryszard Mazurek

Politechnika Białostocka

e-mail: r.mazurek@pb.edu.pl

Referat dotyczy nowej klasy pierścieni, nazwanych pierścieniami NRW [1]. Są to pierścienie, w których elementy nilpotentne tworzą podpierścień radykalny Wedderburna. Omówione zostaną podstawowe własności pierścieni NRW. Klasa ta obejmuje wiele znanych i istotnych typów pierścieni, takich jak pierścień rozdzielne, Armendariza, duo, filialne oraz silnie 2-prymalne. Należą do niej również pierścienie nilpotentno-półprzemienne [1], czyli spełniające warunek półprzemienności ($ab = 0 \Rightarrow \forall_x axb = 0$) ograniczony do elementów nilpotentnych.

Przedstawiona zostanie także konstrukcja ideału $\overline{\mathcal{W}}(R)$, zdefiniowanego za pomocą prawostronnych ideałów pierścienia R , które są pierścieniami NRW. Konstrukcja ta jest analogiczna do iteracyjnego sposobu definiowania radykału pierwszego. Jak się okazuje, problem Köthego ma pozytywne rozwiązanie w klasie pierścieni spełniających warunek $R = \overline{\mathcal{W}}(R)$. Omówione zostanie również zachowanie własności NRW przy klasycznych konstrukcjach pierścieniowych, takich jak sumy proste, pierścienie macierzowe i rozszerzenia Dorroha.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy nr WZ/WI-IIT/2/2025 w Politechnice Białostockiej i sfinansowane z subwencji badawczej przekazanej przez ministra właściwego do spraw nauki.

MSC (2020): 16S35, 16S36, 16N40

Literatura

- [1] R. Mazurek, *Rings whose nilpotent elements form a Wedderburn radical subring*, preprint.

Ideały istotne w pierścieniach macierzy

Karol Pryszczepko

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: karolp@math.uwb.edu.pl

Współautorzy: **Ryszard Romuald Andruszkiewicz** (Uniwersytet w Białymstoku)

Opiszemy ideały istotne w pierścieniu $n \times n$ -macierzy nad dowolnym pierścieniem R . Podamy charakteryzację klasy pierścieni R takich, że dowolny ideał istotny pierścienia $n \times n$ -macierzy nad R jest pierścieniem $n \times n$ -macierzy nad pewnym ideałem istotnym pierścienia R .

MSC (2020): 16D25, 16S50

Literatura

- [1] B.J. Gardner, R. Wiegandt, *Radical Theory of Rings* Marcel Dekker, New York, 2009.
- [2] H.E. Heatherly, R.P. Tucci, *Maximal ideals in rings*, Quaestiones Math., 2005, 28(2), 137–143.
- [3] M. Henriksen, *A simple characterization of commutative rings without maximal ideals*, American Math. Monthly, 1975, 82(5), 502–505.
- [4] D.M. Olson and T.L. Jenkins, *Upper radicals and essential ideals*, J. Austral. Math. Soc. (Series A), 1981 30, 385–389.
- [5] B. de la Rosa, *Ideals and radicals*, Doctoral Dissertation, Technische Hogeschool Delf, 1970.

- [6] A.D. Sands, *Prime ideals in matrix rings*, Proc. Glasg. Math. Assn., 1965, 2(4), 13–195.

Relacje między algebraami a afgebrami Liego

Krzysztof Radziszewski

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: k.radziszewski@uwb.edu.pl

Afgebra Liego to system algebraiczny składający się z przestrzeni afinicznej wraz z bi-afinicznym nawiasem, spełniającym afiniczne wersje antysymetrii oraz tożsamości Jacobiego. Przedstawimy związek między afgebrami Liego a algebraami Liego. W szczególności pokażemy, że każda afgebra Liego jest izomorficzna z algebraą Liego wraz z pewnym elementem i uogólnioną derywacją. Związek między tymi strukturami zilustrujemy kilkoma przykładami.

Prezentowane wyniki pochodzą z pracy [1] napisanej wspólnie z Ryszardem Andruszkiewiczem i Tomaszem Brzezińskim.

MSC (2020): 17B99

Literatura

- [1] R.R. Andruszkiewicz, T. Brzeziński, K. Radziszewski, *Lie affgebras vis-à-vis Lie algebras*, Res. Math., 2025, 80, art. 61.

Liczby Reidemeistera: kongruencje Gaussa, dynamiczne zeta funkcje, wzrost i entropia topologiczna

Mateusz Słomiany

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: mateusz.slomiany@phd.usz.edu.pl

Współautorzy: **Alexander Fel'shtyn** (Uniwersytet Szczeciński)

Niech G jest grupą i $\varphi : G \rightarrow G$ jej endomorfizmem. Mówimy, że $x, y \in G$ są w tej samej klasie *skręconej sprzężoności*, jeżeli istnieje takie $g \in G$, że

$$y = gx\varphi(g^{-1}).$$

Bycie w tej samej klasie skręconej sprzężoności jest relacją równoważności. Liczbę klas skręconej sprzężoności nazywamy *liczbą Reidemeistera* endomorfizmu φ i oznaczamy $R(\varphi)$.

W naszych badaniach rozważamy liczby Reidemeistera $R(\varphi^k)$ iteracji endomorfizmów grup. Jeżeli dla każdego $k \in \mathbb{N}$ liczba $R(\varphi^k) < \infty$, to endomorfizm φ nazywamy *oswojonym* (ang. *tame*). Z ciągiem $\{R(\varphi^k)\}_k$ oswojonego endomorfizmu φ związana jest *zeta funkcja Reidemeistera*

$$R_\varphi(z) := \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{R(\varphi^k)}{k} z^k \right), \quad (1)$$

której wymierność okazuje się implikować zachodzenie *kongruencji Gaussa*

$$\sum_{k|n} \mu(n/k) \cdot R(\varphi^k) \equiv 0 \pmod{n}, \quad (2)$$

gdzie μ jest znaną z teorii liczb funkcją Möbiusa. Nasze wyniki dotyczą kryteriów dla wymierności zeta funkcji Reidemeistera (1) oraz kongruencji Gaussa (2) w pewnych klasach grup.

Wzrost (ang. *growth rate*) liczb Reidemeistera endomorfizmu grupy definiujemy jako granicę ciągu liczb Reidemeistera jego iteracji

$$R^\infty(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} R(\varphi^k),$$

o ile ta granica istnieje. Dla pewnych klas grup ustaliliśmy jawny wzór na wzrost. W przypadku niektórych automorfizmów wzrost okazuje się być związany z entropią topologiczną odwzorowania dualnego $\widehat{\varphi}$ indukowanego na przestrzeni unitarnych, nieprzywiedlnych reprezentacji.

W trakcie wystąpienia przedstawię nasze najnowsze wyniki z [3] dotyczące przedstawionych wyżej obiektów i ich związków oraz omówię techniki zastosowane w dowodach.

MSC (2020): 37C25

Literatura

- [1] A. Fel'shtyn, *Dynamical zeta functions, Nielsen theory and Reidemeister torsion*, Mem. Amer. Math. Soc., 2000.
- [2] A. Fel'shtyn, B. Klopsch, *Pólya–Carlson dichotomy for coincidence Reidemeister zeta functions via profinite completions*, Indagationes Mathematicae, 2022, 33, 753–767.

- [3] A. Fel'shtyn, M. Ślomiany, *The Reidemeister and the Nielsen numbers: growth rate, asymptotic behavior, dynamical zeta functions and the Gauss congruences*, 2025, 1–34, ukaze się.

(Pół)grupy macierzy trójkątnych o pewnych szczególnych przekątnych

Roksana Słowik

Politechnika Śląska

e-mail: roksana.slowik@polsl.pl

W teorii grup, i nie tylko, można znaleźć wiele wyników dotyczących przedstawienia jej elementów w postaci iloczynów elementów o pewnych szczególnych własnościach. Przykładem takich szczególnych elementów mogą być involucje, tj. elementy x , które spełniają równanie (kwadratowe) $x^2 - 1 = 0$. Znane jest twierdzenie mówiące, że macierze określone nad ciałem, będące involucjami, generują grupę wszystkich macierzy o wyznaczniku równym ± 1 . Naturalnym wydaje się być pytanie czy podobne twierdzenie spełnione jest dla macierzy spełniających inne równania kwadratowe.

Niech F będzie ciałem, $\mathcal{A}$ - algebrą zdefiniowaną nad F , natomiast q oznacza wielomian $q(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, gdzie $a_2 \neq 0$. Jeśli $a \in \mathcal{A}$ spełnia $q(a) = 0$, powiemy, że element a jest $q(x)$ -kwadratowy. W pracy [1] udowodniono, że każda $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ macierz trójkątna, której elementy diagonalne przyjmują postać $\lambda_1^{s_i} \lambda_2^{t_i}$, $s_i + t_i = k$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, może być zapisana jako iloczyn k macierzy $q(x)$ -kwadratowych, gdzie $q_{\lambda_1, \lambda_2}(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$. Ten wynik implikuje kolejne pytania. Czy podobny rezultat zachodzi, gdy $\lambda_1 \lambda_2 = 0$? A gdy zastąpimy $q(x)$ wielomianem stopnia n ($n \geq 3$)? Czy wygenerowane zbiory są grupami? Na te pytania odpowiemy, przynajmniej częściowo, w trakcie wystąpienia.

MSC (2020): 15A23, 15A18, 20H20

Literatura

- [1] M.H. Bien, V.M. Tam, D.C.M. Tri, L.Q. Truong, *Products of infinite upper triangular matrices*, Linear Algebra Appl., 2024, 699, 59–71.

- [2] L.Q. Truong, R. Słowik, *Products of infinite matrices annihilated by fixed polynomials*, w przygotowaniu.

Proste rozwiązanie problemu Strattona i Webba

Mateusz Woronowicz

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: m.woronowicz@uwb.edu.pl

Współautorzy: **Ryszard Romuald Andruszkiewicz** (Uniwersytet w Białymstoku)

Prawdopodobnie najbardziej naturalną kwestią dotyczącą grup abelowych, którą można rozważyć w kontekście określania na nich struktury pierścienia, jest pytanie czy ustalona grupa abelowa A może być grupą addytywną pewnego pierścienia z niezerowym mnożeniem. W przypadku gdy odpowiedź na to pytanie jest negatywna, mówimy że A jest *nil-grupą*. Istnieje kilka uogólnień tego pojęcia, które były badane w licznych pracach powstałych na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat. Jednym z nich jest koncepcja *podgrupy kwadratowej* grupy abelowej definiowanej obecnie jako grupa generowana przez kwadraty wszystkich możliwych pierścieni o ustalonej grupie addytywnej. Dla dowolnej grupy abelowej A , jej podgrupa kwadratowa $\square A$ opisana jest więc wzorem:

$$\square A = \sum_{* \in \text{Mult}(A)} A * A,$$

gdzie $\text{Mult}(A)$ oznacza zbiór wszystkich mnożeń pierścieniowych na A . W szczególności wynika stąd, że A jest nil-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $\square A = \{0\}$. Podstawowy problem związany z pojęciem podgrupy kwadratowej grupy abelowej został sformułowany w roku 1980 przez A. E. Strattona oraz M. C. Webba i dotyczył on istnienia grupy abelowej A , dla której grupa ilorazowa $A/\square A$ nie jest nil-grupą. W pracy [6], Stratton i Webb wykazali również, iż nie istnieje torsyjna grupa abelowa o tej własności. Dla grup nietorsyjnych wspomniany problem pozostał nierozwiązany przez 35 lat.

Pierwszy przykład mieszanej grupy abelowej A takiej, że $A/\square A$ nie jest nil-grupą został podany przez A. Najafizadeha w pracy [5]. Ponieważ Autor używał zaawansowanych narzędzi takich jak produkt tensorowy grup abelowych oraz twierdzenia o rozszczepialności modułów, nie mógł on zakładać ważnej dla wielu algebraików łączności pierścieni. Rok później, w ramach artykułu [2],

opublikowaliśmy nowy, znacznie bardziej elementarny dowód tego rezultatu pozwalający na konkluzję, że wynik Najafizadeha pozostaje prawdziwy także w przypadku rozważania jedynie pierścieni łącznych.

Pierwsze przykłady beztorsyjnych grup abelowych zarówno nieskończonej, jak i skończonej rangi, dla których problem Strattona i Webba ma pozytywne rozwiązanie bez względu na to, czy zakładana jest łączność rozważanych pierścieni, skonstruowaliśmy odpowiednio w publikacjach [1] oraz [3]. Kluczową rolę w naszych rozumowaniach odegrały własności p -czystych podgrup grupy addytywnej pierścienia liczb p -adycznych całkowitych oraz własności pewnych podpierścieni skończonych rozszerzeń ciała liczb wymiernych.

W artykule [4] przedstawiliśmy alternatywne rozwiązanie problemu Strattona i Webba dla beztorsyjnych grup abelowych dowolnej skończonej rangi większej niż dwa wykorzystując jedynie klasyczne metody znane z teorii grup abelowych oraz fakt, że każdy podpierścień ciała liczb wymiernych jest filialny.

Podczas referatu szczegółowo omówione zostaną wyniki uzyskane w pracy [4], zaś rezultaty opublikowane w pozostałych cytowanych wyżej artykułach stanowić będą szerokie tło naszych rozważań.

MSC (2020): 20K15, 20K27, 16S99

Literatura

- [1] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A torsion-free abelian group exists whose the quotient group modulo the square subgroup is not a nil-group*, Bull. Aust. Math. Soc., 2016, 94(3), 449–456.
- [2] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *Some new results for the square subgroup of an abelian group*, Comm. Algebra, 2016, 44(6), 2351–2361.
- [3] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A torsion-free abelian group of finite rank exists whose quotient group modulo the square subgroup is not a nil-group*, Quaest. Math., 2018, 41(4), 483–491.
- [4] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A simple solution of Stratton and Webb's problem*, Comm. Algebra, 2022, 50(7), 3113–3123.
- [5] A. Najafizadeh, *On the square submodule of a mixed module*, Gen. Math. Notes, 2015, 27(1), 1–8.
- [6] A.E. Stratton, M.C. Webb, *Abelian groups, nil modulo a subgroup, need not have nil quotient group*, Publ. Math. Debrecen., 1980, 27, 127–130.

Prelegenci

Romuald Ryszard ANDRUSZKIEWICZ · Rozszerzenia pierścieni łącznych za pomocą pierścienia liczb całkowitych	123
Juliusz BANECKI · Realizacja klas homotopii przez rzeczywiste morfizmy algebraiczne	21
Juliusz BANECKI · Twierdzenia o jednostajnej (retrakcyjnej) wymierności i ich zastosowania	94
Krzysztof BARDADYN · Grupoidowe algebry Banacha: topologiczna wolność a wykrywanie ideałów	41
Zbigniew BARTOSIEWICZ · Sterowalność dodatnich układów na skalach czasowych	73
Agnieszka BODZENTA-SKIBIŃSKA · Nasycanie powierzchni algebraicznych	27
Oleg BOGOPOLSKIY · Grupy relatywnie hiperboliczne: skończone podgrupy nieparaboliczne, problem rzędu i problem równań wykładniczych	124
Tomasz BRZEZIŃSKI · Kilka uwag o rachunku różniczkowym na sferach Podlesia	42
Tomasz BRZEZIŃSKI · Skośne derywacje na rozszerzeniach pierścienia liczb całkowitych	125
Paweł CHŁOSTA · Nowa metoda zapisu i badania wybranych własności grafów nieskierowanych	120
Jan Leszek CIEŚLIŃSKI · Niestandardowe funkcje wykładnicze na skalach czasowych i ich zastosowania	74
Jan Leszek CIEŚLIŃSKI · Zastosowanie algebr Clifforda i grup Spin do układów całkowalnych	114
Wojciech CYGAN · Niegaussowskie granice dla pewnych funkcjonałów geometrycznych dla otoczek wypukłych generowanych przez dwa niezależne spacery losowe . .	91
Tomasz CZYŻYCKI · Równania momentów dla rozwiązań homograficznego równania różnicowego z losowymi współczynnikami	75
Alina DOBROGOWSKA · Nowe spojrzenie na algebry Liego	116
Artem DUDKO · Charaktery na nieskończonych grupach dyskretnych i ich zastosowania	28
Piotr DYSZEWSKI · Tasowanie drzew a hipoteza jakobianowa	29
Marzena FILIPOWICZ-CHOMKO · AI jako partner w nauczaniu matematyki – wyniki i refleksje z praktyki	54
Urszula FORYŚ · Matematyka w służbie medycyny: perspektywa onkologii matematycznej	21
Ewa GIREJKO · AI jako partner w nauczaniu matematyki – eksperyment z AI na zajęciach	55
Maciej GNATOWSKI · Równania diofantyczne z funkcją silnia	106
Tomasz GOLIŃSKI · Dziwne własności nawiasów Poissona na rozmaitościach Banacha	116
Katarzyna GRABOWSKA · Trójka Tulczyjewa w działaniu	47

Janusz GRABOWSKI · Geometria trójki Tulczyjewa	48
Janusz GWOŹDZIEWICZ · Rzeczywista hipoteza jakobianowa przy niskich stopniach składowych	95
Agnieszka HEJNA-ŁYŻWA · Przestrzenie Lipschitza w kontekście dunklowskim – po- dejście półgrupowe	23
Waldemar HOŁUBOWSKI · Endomorfizmy przestrzeni liniowych nieskończonego wymiaru	126
Grażyna HORBACZEWSKA · Czy ułatwienie może być przeszkodą?	56
Małgorzata HRYNIEWICKA · Klamry, wiązary, post-grupy	127
Andrzej INDRZEJCZAK · Ile teorii mnogości zawiera logika? O pewnych zastosowa- niach teorii dowodu w logice klas	29
Stefan JACKOWSKI · Matematycy, informatycy, mechanicy – dziekani wydziałów Uniwersytetu Warszawskiego w XX wieku	62
Grzegorz JAKIMOWICZ · Banachowskie algebroidy Liego, a liniowe struktury Poissona na banachowskich wiązkach wektorowych	117
Bronisław JAKUBCZYK · Krzywizna par dynamicznych a punkty sprzężone w równa- niach różniczkowych i układach sterowania	76
Małgorzata JASTRZĘBSKA · Anihilatory w pierścieniach łącznych	107
Maciej JAWORSKI · Ograniczone maszyny Boltzmanna dla danych o wartościach zespoleonych	86
Jacek JENDREJ · O pewnych nowych rezultatach dotyczących rozkładu na solitony	31
Tomasz JĘDRZEJAK · Wielomianowe równania Pella postaci $P(x)^2 - (x^6 + ax^2 + b)Q(x)^2 = 1$	129
Michał JÓŻWIKOWSKI · Warunki optymalności wyższych rzędów w geometrii subrie- mannowskiej	77
Andrzej KAŁUŻA · Uczenie głębokie w estymacji czasowo-zmiennych parametrów w modelach Markowa – zastosowania do regresji nieliniowej i stochastycznych równań różniczkowych	103
Piotr KIELANOWSKI · Symetrie grupy renormalizacji	49
Jerzy Juliusz KIJOWSKI · Włodzimierz Tulczyjew i jego spuścizna	49
Marta KORNAFEL · Długoterminowy wzrost gospodaczy a zachowanie kapitału natu- ralnego	78
Jan KOROŃSKI · Istota historii matematyki a „Słownik biograficzny matematyków polskich” wydany w 2024 roku przez PAU	63
Jan KOROŃSKI · Wybitne osobowości matematyczne w osiemdziesięcioleciu Politechniki Krakowskiej	65
Krzysztof KOWITZ · Liczby miłe a liczby Sophie Germain	108

Jacek KRAJCZOK · Grupy kwantowe i własności aproksymacyjne	42
Tadeusz KRASIŃSKI · Skoki liczb Milnora w liniowych deformacjach osobliwości . .	95
Borys KUCA · Metody ergodyczne w kombinatoryce addytywnej	24
Maciej KUCHARSKI · Niezależne od wymiaru oszacowania norm transformat Riesz .	25
Wojciech KUCHARZ · Odwzorowania ciągle z algebraicznie konstruowalnymi wykresami	96
Krzysztof KURDYKA · Twierdzenie typu Hartogsa dla odwzorowań o wykresie algebraicznie konstruowalnym	96
Bartosz KWAŚNIEWSKI · Twierdzenie Tarskiego i dychotomia dla C^* -algebr grupoidowych	43
Radosław Antoni KYCIA · Operator homotopii vs równania zadane przez formy różniczkowe na rozmaitościach różniczkowych, w tym istotne równania fizyki .	50
Radosław Antoni KYCIA · Sieci hiperzespolone w przewidywaniu szeregów czasowych opisujących notowania giełdowe	88
Irena LASIECKA · Optymalne oszacowania zbieżności energii do zera w nieliniowych układach typu hiperbolicznego w przypadku superliniowego i podliniowego tłumienia	78
Andrzej LENARCIK · O nieregularnych liczbach Łojasiewicza II	97
Andrzej LENARCIK · Przykłady współpracy Politechniki Świętokrzyskiej z nauczycielami matematyki	57
Anna LORANTY · Projekt zespołowy jako jeden z elementów w programie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki	59
Andrzej ŁUCZAK · Statystyka matematyczna a statystyka kwantowa. Strategie bayesowska i minimaksowa	92
Grzegorz ŁYSIK · Gładkość funkcji analitycznych w sensie Dunkla	104
Lech MALIGRANDA · Józef Marcinkiewicz (1910-1940) – w 115 rocznicę urodzin i 85 rocznicę śmierci	32
Izabela Agata MALINOWSKA · Skośne dwustronne klamerkoidy	130
Ryszard MAZUREK · Pierścienie, w których elementy nilpotentne tworzą podpierścień radykalny Wedderburna	131
Ryszard MAZUREK · Uporządkowane półgrupy ternarne	109
Ryszard MAZUREK · Wokół pierścieni Armendariza z polskimi akcentami	34
Adam MICHAŁOWSKI · Twierdzenie Wagnera-Prestona	110
Jacek MIĘKISZ · O stabilności nieokresowych stanów podstawowych	51
Wojciech Tadeusz MŁOTKOWSKI · Kombinatoryka w wolnej probabilistyce . . .	111
Piotr MORMUL · Rekurencje Jeana dla dystrybucji Goursata revisited	98

Dorota MOZYRSKA · Analiza stabilności układów niecałkowitego rzędu z operatorami typu Caputo z czasem dyskretnym i opóźnieniami	79
Agnieszka NIEMCZYNOWICZ · Ciągi Sturm w modelowaniu kwaziperiodycznych ośrodków sprężystych	52
Agnieszka NIEMCZYNOWICZ · Hiperzespólone sieci neuronowe: aktualny stan wiedzy i perspektywy rozwoju	88
Krzysztof Jan NOWAK · Stratyfikacje i opis przez terminy nad ciałami henselowskimi ze strukturą analityczną, jednostajne parametryzacje Yomdina-Gromova . . .	100
Marcin NOWICKI · Linearyzacja mechanicznych systemów sterowania	80
Bronisław Jerzy PABICH · Elementy historii matematyki w szkole średniej na przykładzie zastosowania reguły Pappusa-Guldina do obliczania pól i objętości brył obrotowych	67
Bronisław Jerzy PABICH · Objętość kuli wyznaczona przez Chińczyków w VIII wieku n.e. jako przykład wprowadzania elementów historii matematyki w szkole średniej	68
Dariusz PARTYKA · Struktury regresji zespolonej	89
Wiesław PAWLUCKI · O rafinacjach Glaesera	101
Paweł PEREKIETKA · 100 lat rozrywek matematycznych inż. Jeleńskiego	60
Paweł PEREKIETKA · 150 rocznica zakupu rękopisów Hoene-Wrońskiego przez Jana Działyńskiego, właściciela Biblioteki Kórnickiej	70
Krzysztof PETELCZYC · Geometria binarnych sympleks kodów i kwadratowe konfiguracje kombinatoryczne	121
Piotr PISKORSKI · Nowe podstawy programowe a technologia w nauczaniu matematyki	60
Karol PRYSZCZEPKO · Ideały istotne w pierścieniach macierzy	132
Krzysztof RADZISZEWSKI · Relacje między algebrami a afgebrami Liego	133
Witold RESPONDEK · Płaskie wyjścia nieliniowych układów sterowania z symetriami	81
Ewa ROSZKOWSKA · Zastosowanie metody B-TOPSIS w analizie danych ankietowych: ocena jakości życia mieszkańców miast Europy	105
Barbara ROSZKOWSKA-LECH · Złote Twierdzenie – prawo wzajemności reszt kwadratowych	25
Adam RÓŻYCKI · Formuła Milnora osobliwości kwazi-zwyczajnych	101
Andrzej SITARZ · Geometria nieprzemienialna: od topologii do funkcjonałów spektralnych	36
Andrzej SITARZ · Tensory z widm	44
Grigorij SKLYAR · Jednorodna aproksymacja nieliniowych układów sterowania: podejście algebraiczne	83
Jakub SKRZECZKOWSKI · Metody równań cząstkowych w statystyce	26

Urszula SKWARA · Własności dwuszczipowego modelu dengi z wertykalną transmisją	84
Aneta SLIŻEWSKA · Struktury geometryczne związane z W^* -algebrą	118
Mateusz SŁOMIANY · Liczby Reidemeistera: kongruencje Gaussa, dynamiczne zeta funkcje, wzrost i entropia topologiczna	133
Roksana SŁOWIK · (Pół)grupy macierzy trójkątnych o pewnych szczególnych przekątnych	135
Magdalena SOBOLEWSKA · Konkursy matematyczne nie tylko dla orłów	61
Piotr Mikołaj SOŁTAN · Zwarte grupy kwantowe, faktory typu III i pewne niezmienniki	44
Agnieszka STOCKA · Uogólnienia skończonych krat modularnych	112
Michał STRZELECKI · Od nierówności Dooba do oszacowań związanych z operatorem Hardy'ego	93
Marzena SZAJEWSKA · Funkcje Casimira algebr Liego	119
Tomasz SZWED · O różnych metodach obliczania pola trójkąta	62
Małgorzata TEREPEA · Historia nazwy „przestrzeń polska”	71
Paweł URBAŃSKI · Włodzimierz Tulczyjew – fizyk i matematyk	53
Mateusz WASILEWSKI · Generyczne grafy kwantowe nie mają kwantowych symetrii	45
Jerzy Jacek WOJTKIEWICZ · Hipoteza Riemanna, ciągi Fareya i model Falicova-Kimballa	54
Mateusz WORONOWICZ · Proste rozwiązanie problemu Strattona i Webba	136
Wiesław WÓJCIK · Kontynuacja riemannowskich badań podstaw matematyki w polskiej szkole matematycznej	72
Małgorzata WYRWAS · Algebraiczne warunki osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym	85
Anna WYSOCZAŃSKA-KULA · Algebry grafowe i nieprzemienna probabilistyka	45
Anna WYSOCZAŃSKA-KULA · Rozkład Levy'ego-Chinczyzna dla grup kwantowych	93
Kamil ZABIELSKI · Magmy antyłączne w algebrze obliczeniowej	113
Karolina Wiktoria ZAJĄC · Problemy aproksymacyjne w geometrii algebraicznej	102
Karol ŻYCZKOWSKI · Spacerem przez matematykę powiazaną z informacją kwantową: przykłady własne	36
Mariusz ŻYNEL · Automorfizmy geometrii związanych z binarnymi kodami o stałej odległości	122

Spis treści

Forum	1
Anons	3
Historia	4
Laureaci	5
Wykładowcy plenarni	6
Komitety	6
Komitet naukowy	6
Komitet organizacyjny	7
Uczestnicy	9
Wykłady	19
Wykłady laureatów	21
Juliusz BANECKI · <i>Realizacja klas homotopii przez rzeczywiste morfizmy algebraiczne</i>	21
Urszula FORYŚ · <i>Matematyka w służbie medycyny: perspektywa onkologii matematycznej</i>	21
Agnieszka HEJNA-ŁYŻWA · <i>Przestrzenie Lipschitza w kontekście dunklowskim – podejście półgrupowe</i>	23
Borys KUCA · <i>Metody ergodyczne w kombinatoryce addytywnej</i>	24
Maciej KUCHARSKI · <i>Niezależne od wymiaru oszacowania norm transformat Riesz</i>	25
Barbara ROSZKOWSKA-LECH · <i>Złote Twierdzenie – prawo wzajemności reszt kwadratowych</i>	25
Jakub SKRZECZKOWSKI · <i>Metody równań cząstkowych w statystyce</i>	26
Wykłady plenarne	27

Agnieszka BODZENTA-SKIBIŃSKA · <i>Nasycanie powierzchni algebraicznych</i>	27
Artem DUDKO · <i>Charaktery na nieskończonych grupach dyskretnych i ich zastosowania</i>	28
Piotr DYSZEWSKI · <i>Tasowanie drzew a hipoteza jakobianowa</i>	29
Andrzej INDRZEJCZAK · <i>Ile teorii mnogości zawiera logika? O pewnych zastosowaniach teorii dowodu w logice klas</i>	29
Jacek JENDREJ · <i>O pewnych nowych rezultatach dotyczących rozkładu na solitony</i>	31
Lech MALIGRANDA · <i>Józef Marcinkiewicz (1910–1940) – w 115 rocznicę urodzin i 85 rocznicę śmierci</i>	32
Ryszard MAZUREK · <i>Wokół pierścieni Armendariza z polskimi akcentami</i>	34
Andrzej SITARZ · <i>Geometria nieprzemienna: od topologii do funkcyjonałów spektralnych</i>	36
Karol ŻYCZKOWSKI · <i>Spacerem przez matematykę powiazaną z informacją kwantową: przykłady własne</i>	36
Referaty	39
Algebry operatorowe i geometria nieprzemienna	41
Krzysztof BARDADYN · <i>Grupoidowe algebry Banacha: topologiczna wolność a wykrywanie ideałów</i>	41
Tomasz BRZEZIŃSKI · <i>Kilka uwag o rachunku różniczkowym na sferach Podlesia</i>	42
Jacek KRAJCZOK · <i>Grupy kwantowe i własności aproksymacyjne</i>	42
Bartosz KWAŚNIEWSKI · <i>Twierdzenie Tarskiego i dychotomia dla C^*-algebr grupoidowych</i>	43
Andrzej SITARZ · <i>Tensory z widm</i>	44
Piotr SOŁTAN · <i>Zwarte grupy kwantowe, faktory typu III i pewne niezmienniki</i>	44

Mateusz WASILEWSKI · <i>Generyczne grafy kwantowe nie mają kwantowych symetrii</i>	45
Anna WYSOCZAŃSKA-KULA · <i>Algebry grafowe i nieprzemienność probabilistyczna</i>	45
Dwa oblicza fizyki matematycznej	47
Katarzyna GRABOWSKA · <i>Trójka Tulczyjewa w działaniu</i>	47
Janusz GRABOWSKI · <i>Geometria trójki Tulczyjewa</i>	48
Piotr KIELANOWSKI · <i>Symetrie grupy renormalizacji</i>	49
Jerzy KIJOWSKI · <i>Włodzimierz Tulczyjew i jego spuścizna</i>	49
Radosław Antoni KYCIA · <i>Operator homotopii vs równania zadane przez formy różniczkowe na rozmaitościach różniczkowych, w tym istotne równania fizyki</i>	50
Jacek MIĘKISZ · <i>O stabilności nieokresowych stanów podstawowych</i>	51
Agnieszka NIEMCZYNOWICZ · <i>Ciągi Sturmów w modelowaniu kwaziperiodycznych ośrodków sprężystych</i>	52
Paweł URBAŃSKI · <i>Włodzimierz Tulczyjew – fizyk i matematyk</i>	53
Jerzy Jacek WOJTKIEWICZ · <i>Hipoteza Riemanna, ciągi Fareya i model Falicova-Kimballa</i>	54
Edukacja matematyczna	54
Marzena FILIPOWICZ-CHOMKO · <i>AI jako partner w nauczaniu matematyki – wyniki i refleksje z praktyki</i>	54
Ewa GIREJKO · <i>AI jako partner w nauczaniu matematyki – eksperyment z AI na zajęciach</i>	55
Grażyna HORBACZEWSKA · <i>Czy ułatwienie może być przeszkodą?</i>	56
Andrzej LENARCIK · <i>Przykłady współpracy Politechniki Świętokrzyskiej z nauczycielami matematyki</i>	57

Anna LORANTY · <i>Projekt zespołowy jako jeden z elementów w programie kształcenia przyszłych nauczycieli matematyki</i>	59
Paweł PEREKIETKA · <i>100 lat Rozrywek matematycznych inż. Jeleńskiego</i>	60
Piotr PISKORSKI · <i>Nowe podstawy programowe a technologia w nauczaniu matematyki</i>	60
Magdalena SOBOLEWSKA · <i>Konkursy matematyczne nie tylko dla orłów</i>	61
Tomasz SZWED · <i>O różnych metodach obliczania pola trójkąta</i>	62
Historia matematyki	62
Stefan JACKOWSKI · <i>Matematycy, informatycy, mechanicy-dziekani wydziałów Uniwersytetu Warszawskiego w XX wieku</i>	62
Jan KORÓŃSKI · <i>Istota historii matematyki a Słownik biograficzny matematyków polskich wydany w 2024 roku przez PAU</i>	63
Jan KORÓŃSKI · <i>Wybitne osobowości matematyczne w osiemdziesięcioleciu Politechniki Krakowskiej</i>	65
Bronisław PABICH · <i>Elementy historii matematyki w szkole średniej na przykładzie zastosowania reguły Pappusa-Guldina do obliczania pól i objętości brył obrotowych</i>	67
Bronisław PABICH · <i>Objętość kuli wyznaczona przez Chińczyków w VIII wieku n.e. jako przykład wprowadzania elementów historii matematyki w szkole średniej</i>	68
Paweł PEREKIETKA · <i>150 rocznica zakupu rękopisów Hoene-Wrońskiego przez Jana Działyńskiego, właściciela Biblioteki Kórnickiej</i>	70
Małgorzata TEREPEŁA · <i>Historia nazwy przestrzeń polska</i>	71
Wiesław WÓJCIK · <i>Kontynuacja riemannowskich badań podstaw matematyki w polskiej szkole matematycznej</i>	72
Matematyczna teoria sterowania	73

Zbigniew BARTOSIEWICZ · <i>Sterowalność dodatnich układów na skalach czasowych</i>	73
Jan Leszek CIEŚLIŃSKI · <i>Niestandardowe funkcje wykładnicze na skalach czasowych i ich zastosowania</i>	74
Tomasz CZYŻYCKI · <i>Równania momentów dla rozwiązań homograficznego równania różnicowego z losowymi współczynnikami</i>	75
Bronisław JAKUBCZYK · <i>Krzywizna par dynamicznych a punkty sprzężone w równaniach różniczkowych i układach sterowania</i>	76
Michał JÓŻWIKOWSKI · <i>Warunki optymalności wyższych rzędów w geometrii subriemannowskiej</i>	77
Marta KORNAFEL · <i>Długoterminowy wzrost gospodaczy a zachowanie kapitału naturalnego</i>	78
Irena LASIECKA · <i>Optymalne oszacowania zbieżności energii do zera w nieliniowych układach typu hiperbolicznego w przypadku superliniowego i podliniowego tłumienia</i>	78
Dorota MOZYRSKA · <i>Analiza stabilności układów niecałkowitego rzędu z operatorami typu Caputo z czasem dyskretnym i opóźnieniami</i>	79
Marcin NOWICKI · <i>Linearyzacja mechanicznych systemów sterowania</i>	80
Witold RESPONDEK · <i>Płaskie wyjścia nieliniowych układów sterowania z symetriami</i>	81
Grigorij SKLYAR · <i>Jednorodna aproksymacja nieliniowych układów sterowania: podejście algebraiczne</i>	83
Urszula SKWARA · <i>Własności dwuszczepowego modelu dengi z wertykalną transmisją</i>	84
Małgorzata WYRWAS · <i>Algebraiczne warunki osiągalności nieliniowych układów sterowania z czasem dyskretnym</i>	85
Matematyczne aspekty hiperzespólonych sieci neuronowych	86

Maciej JAWORSKI · <i>Ograniczone maszyny Boltzmanna dla danych o wartościach zespolonych</i>	86
Radosław Antoni KYCIA · <i>Sieci hiperzespolone w przewidywaniu szeregów czasowych opisujących notowania giełdowe</i>	88
Agnieszka NIEMCZYNOWICZ · <i>Hiperzespolone sieci neuronowe: aktualny stan wiedzy i perspektywy rozwoju</i>	88
Dariusz PARTYKA · <i>Struktury regresji zespolonej</i>	89
Rachunek prawdopodobieństwa i jego synergie	91
Wojciech CYGAN · <i>Niegaussowskie granice dla pewnych funkcjonałów geometrycznych dla otoczek wypukłych generowanych przez dwa niezależne spacery losowe</i>	91
Andrzej ŁUCZAK · <i>Statystyka matematyczna a statystyka kwantowa. Strategie bayesowska i minimaksowa</i>	92
Michał STRZELECKI · <i>Od nierówności Dooba do oszacowań związanych z operatorem Hardy’ego</i>	93
Anna WYSOCZAŃSKA-KULA · <i>Rozkład Levy’ego-Khinchine’a dla grup kwantowych</i>	93
Rzeczywista geometria algebraiczna i teoria osobliwości	94
Juliusz BANECKI · <i>Twierdzenia o jednostajnej (retrakcyjnej) wymierności i ich zastosowania</i>	94
Janusz GWOŹDZIEWICZ · <i>Rzeczywista hipoteza jakobianowa przy niskich stopniach składowych</i>	95
Tadeusz KRASIŃSKI · <i>Skoki liczb Milnora w liniowych deformacjach osobliwości</i>	95
Wojciech KUCHARZ · <i>Odwzorowania ciągle z algebraicznie konstruowalnymi wykresami</i>	96
Krzysztof KURDYKA · <i>Twierdzenie typu Hartogsa dla odwzorowań o wykresie algebraicznie konstruowalnym</i>	96

Andrzej LENARCIK · <i>O nieregularnych liczbach Łojasiewicza II</i>	97
Piotr MORMUL · <i>Rekurencje Jeana dla dystrybucji Goursata revisited</i>	98
Krzysztof Jan NOWAK · <i>Stratyfikacje i opis przez termy nad ciałami henselowskimi ze strukturą analityczną, jednostajne parametryzacje Yomdina–Gromova</i>	100
Wiesław PAWŁUCKI · <i>O rafinacjach Glaesera</i>	101
Adam RÓŻYCKI · <i>Formuła Milnora osobliwości kwazi-zwyczajnych</i>	101
Karolina ZAJĄC · <i>Problemy aproksymacyjne w geometrii algebraicznej</i>	102
Sesja ogólna, poświęcona innym zagadnieniom matematycznym	103
Andrzej KAŁUŻA · <i>Uczenie głębokie w estymacji czasowo-zmiennych parametrów w modelach Markowa – zastosowania do regresji nieliniowej i stochastycznych równań różniczkowych</i>	103
Grzegorz ŁYSIK · <i>Gładkość funkcji analitycznych w sensie Dunkla</i>	104
Ewa ROSZKOWSKA · <i>Zastosowanie metody B-TOPSIS w analizie danych ankietowych: ocena jakości życia mieszkańców miast Europy</i>	105
Struktury algebraiczne i kombinatoryka	106
Maciej GNATOWSKI · <i>Równania diofantyczne z funkcją silnia</i>	106
Małgorzata JASTRZĘBSKA · <i>Anihilatory w pierścieniach łącznych</i>	107
Krzysztof KOWITZ · <i>Liczby miłe a liczby Sophie Germain</i>	108
Ryszard MAZUREK · <i>Uporządkowane półgrupy ternarne</i>	109
Adam MICHAŁOWSKI · <i>Twierdzenie Wagnera-Prestona</i>	110
Wojciech MŁOTKOWSKI · <i>Kombinatoryka w wolnej probabilistyce</i>	111
Agnieszka STOCKA · <i>Uogólnienia skończonych krat modularnych</i>	112
Kamil ZABIELSKI · <i>Magmy antyłączne w algebrze obliczeniowej</i>	113
Struktury geometryczne i układy całkowlne	114

Jan Leszek CIEŚLIŃSKI · <i>Zastosowanie algebr Clifforda i grup Spin do układów całkownych</i>	114
Alina DOBROGOWSKA · <i>Nowe spojrzenie na algebry Liego</i>	116
Tomasz GOLIŃSKI · <i>Dziwne własności nawiasów Poissona na rozmaitościach Banacha</i>	116
Grzegorz JAKIMOWICZ · <i>Banachowskie algebroidy Liego, a liniowe struktury Poissona na banachowskich wiązках wektorowych</i>	117
Aneta SŁIŻEWSKA · <i>Struktury geometryczne związane z W^*-algebrą</i>	118
Marzena SZAJEWSKA · <i>Funkcje Casimira algebr Liego</i>	119
Struktury incydencyjne, geometrie skończone, teoria kodów	120
Paweł CHŁOSTA · <i>Nowa metoda zapisu i badania wybranych własności grafów nieskierowanych</i>	120
Krzysztof PETELCZYK · <i>Geometria binarnych sympleks kodów i kwadratowe konfiguracje kombinatoryczne</i>	121
Mariusz ŻYNEL · <i>Automorfizmy geometrii związanych z binarnymi kodami o stałej odległości</i>	122
Teoria grup, pierścieni i ciał	123
Ryszard Romuald ANDRUSZKIEWICZ · <i>Rozszerzenia pierścieni łącznych za pomocą pierścienia liczb całkowitych</i>	123
Oleg BOGOPOLSKI · <i>Grupy relatywnie hiperboliczne: skończone podgrupy nieparaboliczne, problem rzędu i problem równań wykładniczych</i>	124
Tomasz BRZEZIŃSKI · <i>Skośne derywacje na rozszerzeniach pierścienia liczb całkowitych</i>	125
Waldemar HOŁUBOWSKI · <i>Endomorfizmy przestrzeni liniowych nieskończonego wymiaru</i>	126
Małgorzata HRYNIEWICKA · <i>Klamry, wiązary, post-grupy</i>	127

Tomasz JĘDRZEJAK · <i>Wielomianowe równania Pella postaci</i> $P(x)^2 - (x^6 + ax^2 + b)Q(x)^2 = 1$	129
Izabela Agata MALINOWSKA · <i>Skośne dwustronne klamerkoidy</i>	130
Ryszard MAZUREK · <i>Pierścienie, w których elementy nilpotentne tworzą podpierścień radykalny Wedderburna</i>	131
Karol PRYSZCZEPKO · <i>Ideały istotne w pierścieniach macierzy</i>	132
Krzysztof RADZISZEWSKI · <i>Relacje między algebrami a afgebrami Liego</i>	133
Mateusz SŁOMIANY · <i>Liczby Reidemeistera: kongruencje Gaussa, dynamiczne zeta funkcje, wzrost i entropia topologiczna</i>	133
Roksana SŁOWIK · <i>(Pół)grupy macierzy trójkątnych o pewnych szczególnych przekątnych</i>	135
Mateusz WORONOWICZ · <i>Proste rozwiązanie problemu Strattona i Webba</i>	136
Prelegenci	139