

Przestrzeń Lipschitza w kontekście dunklowskim – podejście półgrupowe

Agnieszka Hejna-Łyżwa

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: agnieszka.hejna@math.uni.wroc.pl

Dla $0 < \beta < 1$, klasyczna niejednorodna przestrzeń Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$ w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^N$ jest zdefiniowana jako

$$\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N) = \left\{ f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}, \|f\|_{L^\infty} + \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{x}'} \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^\beta} =: \|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)} < \infty \right\}.$$

W pracy Taiblesona [1] autor użył całki Poissona (półgrupy):

$$f(\mathbf{x}, t) = c_N^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} f(\mathbf{y}) \frac{t}{(t^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2)^{(N+1)/2}} d\mathbf{y}$$

do badania własności przestrzeni Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$. Dokładniej, dla dowolnej ustalonej liczby całkowitej dodatniej m , norma $\|f\|_{\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)}$ jest równoważna

$$\|f\|_{L^\infty} + \sup_{t>0} t^{m-\beta} \left\| \frac{d^m}{dt^m} f(\mathbf{x}, t) \right\|_{L^\infty}.$$

Twierdzenie to prowadzi do rozszerzenia pojęcia przestrzeni Lipschitza na wszystkie dodatnie parametry $\beta > 0$.

Niech $\{P_t\}_{t>0}$ będzie półgrupą Dunkl–Poissona związaną z systemem pierwiastków $R \subset \mathbb{R}^N$ oraz funkcją krotności $k \geq 0$. Mówimy, że ograniczona funkcja mierzalna f określona na $\mathbb{R}^N$ należy do niejednorodnej przestrzeni Lipschitza Λ_k^β , $\beta > 0$, jeśli

$$\sup_{t>0} t^{m-\beta} \left\| \frac{d^m}{dt^m} P_t f \right\|_{L^\infty} < \infty,$$

gdzie $m = [\beta] + 1$.

Podczas mojego wystąpienia omówimy następujący wynik.

Twierdzenie. Dla dowolnego $\beta > 0$ przestrzeń Lipschitza Λ_k^β pokrywa się z klasyczną przestrzenią Lipschitza $\Lambda^\beta(\mathbb{R}^N)$, a odpowiadające im normy są równoważne.

Przedyskutujemy główne idee i intuicje. Przyjrzymy się również metodzie dowodu, która wykorzystuje inne charakteryzacje przestrzeni oraz stosuje metodę K -interpolacji. Metoda dowodu różni się od klasycznych metod używanych w tym kontekście.

Są to prace wspólne z prof. Jackiem Dziubańskim.

MSC (2020): 44A20

Literatura

- [1] M.H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean n -space I. Principal properties*, J. Math. Mech., 1964, 13, 407–479.