

Uczenie głębokie w estymacji czasowo-zmiennych parametrów w modelach Markowa – zastosowania do regresji nieliniowej i stochastycznych równań różniczkowych

Andrzej Kałuża

Akademia Górniczo-Hutnicza

e-mail: akaluza@agh.edu.pl

Paweł M. Morkisz

Akademia Górniczo-Hutnicza

Paweł Przybyłowicz

Akademia Górniczo-Hutnicza

Martyna Wiącek

Akademia Górniczo-Hutnicza

Bartłomiej Mulewicz

Aigorithmics sp. z o.o.

Estymacja parametrów w modelach opartych na równaniach różniczkowych stochastycznych (SDE) jest zadaniem trudnym ze względu na złożoność parametrów zależnych od czasu, co często prowadzi do uproszczeń w postaci funkcji przedziałowo stałych.

Proponujemy nowe podejście do tego problemu z wykorzystaniem sieci neuronowych, stanowiące rozwinięcie metod tradycyjnych. W naszym algorytmie definiujemy odpowiednią funkcję straty w oparciu o metodę największej wiarygodności, co pozwala przekształcić zadanie aproksymacji w problem optymalizacji i zastosować techniki uczenia głębokiego.

Dowodzimy, że przy spełnieniu pewnych warunków

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \left(\mathbb{E} \|X_1(t) - X_2(t)\|^2 \right)^{1/2} \leq C \left(\|\Theta_1 - \Theta_2\|_{\infty}^{\alpha_1} + \|\Theta_1 - \Theta_2\|_{\infty}^{\alpha_2} \right),$$

gdzie α_1 oraz α_2 są wykładnikami opisującymi warunki ciągłości Höldera dla współczynników dryfu i dyfuzji, X_1 jest procesem będącym rozwiązaniem danego SDE z rzeczywistą funkcją parametru $\Theta_1 = \Theta_1(t)$, a X_2 jest rozwiązaniem tego samego SDE, lecz z funkcją parametru $\Theta_2 = \Theta_2(t)$ otrzymaną z naszej sieci neuronowej, która aproksymuje Θ_1 .

Skuteczność naszego podejścia prezentujemy na serii eksperymentów numerycznych z użyciem Tensorflow (frameworka uczenia głębokiego). Porównujemy trajektorie rozwiązań wygenerowane z wykorzystaniem dwóch zestawów funkcji parametrów – rzeczywistych oraz aproksymowanych. Ponadto porównujemy również rozkłady $X_1(T)$ i $X_2(T)$.

MSC (2020): 60J20, 65C30, 62M05

Literatura

- [1] A. Kałuża, P.M. Morkisz, B. Mulewicz, P. Przybyłowicz, M. Wiącek, *Deep learning-based estimation of time-dependent parameters in Markov models with application to nonlinear regression and SDEs*, Applied Mathematics and Computation, 2024, 480, 128906.
- [2] O. Dürr, B. Sick, E. Murina, *Probabilistic Deep Learning with Python, Keras and TensorFlow Probability*, Manning Publications, 2020.