

Równania diofantyczne z funkcją silnia

Maciej Gnatowski

Politechnika Białostocka

e-mail: 77932@student.pb.edu.pl

Interesującą klasę równań diofantycznych stanowią te, w których pojawia się funkcja silnia. Klasycznym przykładem jest równanie Brocarda-Ramanujana $n! + 1 = k^2$. Chociaż było badane już od XIX wieku, do dziś nie wiadomo, czy jedynymi jego rozwiązaniami są trzy pary liczb naturalnych

$$(n, k) = (4, 5), (5, 11), (7, 71),$$

a nawet czy rozwiązań jest tylko skończenie wiele.

Na szczególną uwagę zasługują równania diofantyczne zawierające zarówno silnie, jak i wyrażenia wykładnicze. Szybki wzrost i nieregularność występujących w nich składników sprawiają, że często trudno jest odpowiedzieć na pytanie, czy rozwiązując dane równanie, faktycznie wyczerpaliśmy wszystkie możliwości.

W referacie skupię się na dwóch bliźniaczych równaniach:

$$(n!)^k - n^k = (k!)^n - k^n \quad \text{oraz} \quad (n!)^k + n^k = (k!)^n + k^n.$$

W pracy [1] pokazano, że poza trywialnym przypadkiem $n = k$ oraz wyjątkami $(n, k) = (1, 2), (2, 1)$ w pierwszym równaniu, równania te nie mają innych rozwiązań. Zaprezentuję alternatywny, oparty na nierównościach, dowód tego faktu [2]. Dodatkowo rozważona zostanie nierówność związana z pierwszym równaniem: $(n!)^k - n^k(n-1)^k > (k!)^n - k^n$.

MSC (2020): 11D61

Literatura

- [1] H. Alzer, F. Luca, *Diophantine equations involving factorials*, Math. Bohem., 2017, 142(2), 181–184.
- [2] M. Gnatowski, *On some diophantine equations involving factorials*, Math. Bohem., <https://mbpapers.math.cas.cz/full/online1st/MB.2025.0043-25.pdf>.