

Klamry, wiązary, post-grupy

Małgorzata Hryniewicka

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: margitt@math.uwb.edu.pl

Klamry weszły już do kanonu pojęć matematycznych. Wiazary na stałe zagrościły w świadomości algebraików. Ostatnio pojawiły się post-grupy. *Skośną lewostronną klamrą* $(B, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet)$ nazywamy grupę $(B, \circ, 1_\circ)$ wraz z operacją binarną $\bullet$ zadającą na B dodatkową strukturę grupy $(B, \bullet, 1_\bullet)$ i spełniającą lewostronną dystrybutywność w sensie

$$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ x^{-1_\circ} \circ (x \bullet z),$$

gdzie $x, y, z \in B$ oraz $x^{-1_\circ}$ oznacza element odwrotny do x w grupie $(B, \circ, 1_\circ)$, por. [4]. Dla grupy $(G, \circ, 1_\circ)$ operator $\mathcal{B}$ na G nazywamy *operatorem Rota-Baxtera*, jeżeli

$$\mathcal{B}(x) \circ \mathcal{B}(y) = \mathcal{B}(x \circ \mathcal{B}(x) \circ y \circ \mathcal{B}(x)^{-1_\circ}),$$

gdzie $x, y \in G$. Wtedy $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B})$ nazywamy *grupą Rota-Baxtera*. Operacja binarna $x \bullet y = x \circ \mathcal{B}(x) \circ y \circ \mathcal{B}(x)^{-1_\circ}$ zadaje na grupie Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B})$ strukturę skośnej lewostronnej klamry $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet = 1_\circ)$, por. [2].

Lewostronną post-grupą $(G, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ nazywamy grupę $(G, \circ, 1_\circ)$ wraz z operacją binarną $\triangleright$ przekształcającą każde lewostronne mnożenie $y \mapsto (x \triangleright y)$ w G w automorfizm grupy

$$x \triangleright (y \circ z) = (x \triangleright y) \circ (x \triangleright z),$$

gdzie $x, y, z \in G$, dla której operacja binarna $x \bullet y = x \circ (x \triangleright y)$ na G spełnia

$$(x \bullet y) \triangleright z = x \triangleright (y \triangleright z),$$

gdzie $x, y, z \in G$, por. [1]. Każdą lewostronną post-grupę $(G, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ przekształcimy w skośną lewostronną klamrę $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet = 1_\circ)$ definiując operację binarną $x \bullet y = x \circ (x \triangleright y)$ na G . Na odwrót, startując od skośnej lewostronnej klamry $(B, \circ, 1_\circ, \bullet, 1_\bullet)$ przejdziemy do lewostronnej post-grupy $(B, \circ, 1_\circ, \triangleright)$ definiując operację binarną $x \triangleright y = x^{-1_\circ} \circ (x \bullet y)$ na B .

Skośne lewostronne klamry mają strukturę skośnego lewostronnego wiązara. *Skośnym lewostronnym wiązarem* $(T, \circ, 1_\circ, \bullet, \sigma)$ nazywamy grupę $(T, \circ, 1_\circ)$

wraz z operacją binarną $\bullet$ zadającą na T strukturę półgrupy $(T, \bullet)$ oraz operatorem σ na T spełniającymi lewostronną dystrybutywność w sensie

$$x \bullet (y \circ z) = (x \bullet y) \circ \sigma(x)^{-1_\circ} \circ (x \bullet z),$$

gdzie $x, y, z \in T$, por. [3]. Systemem Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ nazywamy grupę $(G, \circ, 1_\circ)$ wraz z operatorami $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ na G spełniającymi

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_1(x) \circ \mathcal{B}_1(y) &= \mathcal{B}_1(\mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x)) \\ \mathcal{B}_2(y) \circ \mathcal{B}_2(x) &= \mathcal{B}_2(\mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x)),\end{aligned}$$

gdzie $x, y \in G$. Operacja binarna $x \bullet y = \mathcal{B}_1(x) \circ y \circ \mathcal{B}_2(x)$ oraz operator $\sigma(x) = \mathcal{B}_1(x) \circ \mathcal{B}_2(x)$ zadają na systemie Rota-Baxtera $(G, \circ, 1_\circ, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$ strukturę skośnego lewostronnego wiązara $(G, \circ, 1_\circ, \bullet, \sigma)$, por. [5].

W [6] autor zdefiniował pojęcie *słabej lewostronnej skrzyżowanej post-grupy*, równoważne pojęciu skośnego lewostronnego wiązara. W trakcie wystąpienia przyjrzymy się także temu pojęciu.

MSC (2020): 17B38, 20N10, 20N99

Literatura

- [1] Ch. Bai, L. Guo, Y. Sheng, R. Tang, *Post-groups, (Lie-)Butcher group and Yang-Baxter equation*, Math. Ann., 2024, 388, 3127–3167.
- [2] V. Bardakov, V. Gubarev, *Rota-Baxter groups, skew left braces, and the Yang-Baxter equation*, J. Algebra, 2022, 596, 328–351.
- [3] T. Brzeziński, *Trusses: between braces and rings*, Trans. Amer. Math. Soc., 2019, 372, 4149–4176.
- [4] L. Guarnieri, L. Vendramin, *Skew braces and the Yang-Baxter equation*, Math. Comp., 2017, 86, 2519–2534.
- [5] Z. Li, S. Wang, *Rota-Baxter systems and skew trusses*, J. Algebra, 2023, 623, 447–480.
- [6] S. Wang, *(Weak) twisted post-groups, skew trusses and rings*, arXiv:2307.10535.