

## O nieregularnych liczbach Łojasiewicza II

**Andrzej Lenarcik**

Politechnika Świętokrzyska

e-mail: [andrzej.lenarcik@gmail.com](mailto:andrzej.lenarcik@gmail.com)

Rozważamy pierścień szeregów zbieżnych dwóch zmiennych zespolonych. Każdy taki szereg definiuje lokalnie kielik funkcji analitycznej. Osobliwością nazywamy kielik znikający w zerze wraz z pochodnymi cząstkowymi pierwszego rzędu. Osobliwość jest izolowana, gdy gradient funkcji ma zero izolowane w zerze. Wówczas norma gradientu jest lokalnie większa od iloczynu dodatniej stałej i normy argumentu podniesionej do pewnego dodatniego wykładnika. Infimum po wszystkich możliwych takich wykładnikach nazywamy lokalnym wykładnikiem Łojasiewicza gradientu. Płoski [7] udowodnił, że wykładnik ten znajduje się w zbiorze

$$\left\{1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 4\frac{1}{3}, 4\frac{1}{2}, 4\frac{2}{3}, 5, \dots\right\},$$

czyli jest postaci

$$N + \frac{b}{a}, \quad a, b, N \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq b < a < N.$$

García Barroso i Płoski [3] dostrzegli, że nie każda z podanych liczb jest realizowana, jako wykładnik Łojasiewicza gradientu. Z kolei w pracy [2], gdy do zespołu dołączył T. Krasieński, wyjaśniono, że każda liczba Łojasiewicza spełniająca dodatkowy warunek regularności  $a + b \leq N$  jest realizowana dla pewnej osobliwości niezdegenerowanej w sensie Kuohnirenki. To było impulsem do poszukiwania nieregularnych liczb Łojasiewicza, takich że  $a + b > N$  (najmniejszą taką liczbą okazało się  $15\frac{8}{9}$ ). Ponadto podano warunek konieczny, jaki musi spełniać struktura osobliwości z nieregularną liczbą Łojasiewicza gradientu wraz z ciekawym przykładem liczby  $169\frac{142}{143}$ , spełniającej warunek konieczny, która jednak nie może być zrealizowana przez żadną osobliwość. W styczniu 2025, podczas XLV Konferencji i Warsztatów „Geometria Analityczna i Algebraiczna” w Łodzi, autor referatu przypomniał część wyników z pracy [2] oraz wyjaśnił efekt, związany z nieistnieniem osobliwości realizujących niektóre liczby Łojasiewicza spełniające warunek konieczny, z pomocą tzw. drzew Eggersa-Płoskiego ([4, 5]). Drzewa te, będące wariantem oryginalnej konstrukcji Eggersa [1], otrzymywane są w sposób niezmienniczy za pomocą dystansu logarytmicznego Płoskiego [6].

W przygotowywanym referacie autor przedstawi dalsze badania nieregularnych liczb Łojasiewicza.

**MSC (2020):** 32S05, 14H20

### Literatura

- [1] H. Eggers, *Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten*, Bonner Math. Schriften 147, Universität Bonn, Bonn 1982.
- [2] E.R. García Barroso, T. Krasinski, A. Płoski, *The Łojasiewicz numbers and plane curve singularities*, Ann. Polon. Math. 87, 2005, 127–149.
- [3] E.R. García Barroso, A. Płoski, *On the Łojasiewicz numbers*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I (336), 2003, 585–588.
- [4] A. Lenarcik, *Eggers tree and jacobian Newton polygon*, Manuscripta Math. 142, 2013, 233–244.
- [5] A. Lenarcik, *On the Łojasiewicz exponent, special direction and maximal polar quotient*, ArXiv:1112.5578v1.
- [6] A. Płoski, *Remarque sur la multiplicité d'intersection des branches planes*, Bull. Pol. Acad. Sci. Math. 33(11-12), 1985, 601–605.
- [7] A. Płoski, *Multiplicity and the Łojasiewicz exponent*, in: Singularities, Banach Center Publ. 20, PWN, Warszawa, 1988, 353–364.