

Proste rozwiązanie problemu Strattona i Webba

Mateusz Woronowicz

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: m.woronowicz@uwb.edu.pl

Ryszard Romuald Andruszkiewicz

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: r.andruszkiewicz@uwb.edu.pl

Prawdopodobnie najbardziej naturalną kwestią dotyczącą grup abelowych, którą można rozważyć w kontekście określania na nich struktury pierścienia, jest pytanie czy ustalona grupa abelowa A może być grupą addytywną pewnego pierścienia z niezerowym mnożeniem. W przypadku gdy odpowiedź na to pytanie jest negatywna, mówimy że A jest *nil-grupą*. Istnieje kilka uogólnień tego pojęcia, które były badane w licznych pracach powstałych na przestrzeni ostatnich kilkudziesięciu lat. Jednym z nich jest koncepcja *podgrupy kwadratowej* grupy abelowej definiowanej obecnie jako grupa generowana przez kwadraty wszystkich możliwych pierścieni o ustalonej grupie addytywnej. Dla dowolnej grupy abelowej A , jej podgrupa kwadratowa $\square A$ opisana jest więc wzorem:

$$\square A = \sum_{* \in \text{Mult}(A)} A * A,$$

gdzie $\text{Mult}(A)$ oznacza zbiór wszystkich mnożeń pierścieniowych na A . W szczególności wynika stąd, że A jest nil-grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $\square A = \{0\}$. Podstawowy problem związany z pojęciem podgrupy kwadratowej grupy abelowej został sformułowany w roku 1980 przez A. E. Strattona oraz M. C. Webba i dotyczył on istnienia grupy abelowej A , dla której grupa ilorazowa $A/\square A$ nie jest nil-grupą. W pracy [6], Stratton i Webb wykazali również, iż nie istnieje torsyjna grupa abelowa o tej własności. Dla grup nietorsyjnych wspomniany problem pozostał nierozwiązany przez 35 lat.

Pierwszy przykład mieszanej grupy abelowej A takiej, że $A/\square A$ nie jest nil-grupą został podany przez A. Najafizadeha w pracy [5]. Ponieważ Autor używał zaawansowanych narzędzi takich jak produkt tensorowy grup abelowych oraz twierdzenia o rozszczepialności modułów, nie mógł on zakładać ważnej dla wielu algebraików łączności pierścieni. Rok później, w ramach artykułu [2], opublikowaliśmy nowy, znacznie bardziej elementarny dowód tego rezultatu pozwalający na konkluzję, że wynik Najafizadeha pozostaje prawdziwy także w przypadku rozważania jedynie pierścieni łącznych.

Pierwsze przykłady beztorsyjnych grup abelowych zarówno nieskończonej, jak i skończonej rangi, dla których problem Strattona i Webba ma pozytywne rozwiązanie bez względu na to, czy zakładana jest łączność rozważanych pierścieni, skonstruowaliśmy odpowiednio w publikacjach [1] oraz [3]. Kluczową rolę w naszych rozumowaniach odegrały własności p -czystych podgrup grupy addytywnej pierścienia liczb p -adycznych całkowitych oraz własności pewnych podpierścieni skończonych rozszerzeń ciała liczb wymiernych.

W artykule [4] przedstawiliśmy alternatywne rozwiązanie problemu Strattona i Webba dla beztorsyjnych grup abelowych dowolnej skończonej rangi większej niż dwa wykorzystując jedynie klasyczne metody znane z teorii grup abelowych oraz fakt, że każdy podpierścień ciała liczb wymiernych jest filialny.

Podczas referatu szczegółowo omówione zostaną wyniki uzyskane w pracy [4], zaś rezultaty opublikowane w pozostałych cytowanych wyżej artykułach stanowić będą szerokie tło naszych rozważań.

MSC (2020): 20K15, 20K27, 16S99

Literatura

- [1] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A torsion-free abelian group exists whose the quotient group modulo the square subgroup is not a nil-group*, Bull. Aust. Math. Soc., 2016, 94(3), 449–456.
- [2] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *Some new results for the square subgroup of an abelian group*, Comm. Algebra, 2016, 44(6), 2351–2361.
- [3] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A torsion-free abelian group of finite rank exists whose quotient group modulo the square subgroup is not a nil-group*, Quaest. Math., 2018, 41(4), 483–491.
- [4] R.R. Andruszkiewicz, M. Woronowicz, *A simple solution of Stratton and Webb's problem*, Comm. Algebra, 2022, 50(7), 3113–3123.
- [5] A. Najafizadeh, *On the square submodule of a mixed module*, Gen. Math. Notes, 2015, 27(1), 1–8.
- [6] A.E. Stratton, M.C. Webb, *Abelian groups, nil modulo a subgroup, need not have nil quotient group*, Publ. Math. Debrecen., 1980, 27, 127–130.