

Ile teorii mnogości zawiera logika? O pewnych zastosowaniach teorii dowodu w logice klas

Andrzej Indrzejczak

Uniwersytet Łódzki

e-mail: andrzej.indrzejczak@filhist.uni.lodz.pl

Jednym z popularnych stanowisk w sporze o podstawy matematyki był logicyzm proponujący redukcję matematyki do logiki. Problemy z ujęciem formalnym logicyzmu, który byłby dla potrzeb matematyków bezpieczny (system Fregego okazał się sprzeczny) i praktyczny (teoria typów Russella i Whiteheada była zbyt skomplikowana), doprowadziły do zarzucenia tego projektu. Aksjomatyczne ujęcia teorii mnogości, zwłaszcza ZFC, są traktowane jako standard od ponad stu lat, a teoria mnogości wydaje się precyzyjnie odseparowana od logiki. Sporadyczne próby reaktywacji osłabionych form logicyzmu nie cieszyły się popularnością, poza kręgiem filozofów matematyki. Wydaje się jednak, że rozwój współczesnej teorii dowodu umożliwia podjęcie obrony słabszej wersji logicyzmu określanej jako strukturalny neologicyzm (Tennant [1]).

W projekcie strukturalnego neologicyzmu nie chodzi o redukcję matematyki do logiki, ale o uwyrażnienie różnicy między znaczeniem dyskursu matematycznego a istnieniem obiektów, o których się mówi. Przydatne jest odwołanie się do rozróżnienia między klasami – dowolnymi kolekcjami, które można scharakteryzować za pomocą języka, a zbiorami – klasami, które istnieją. Tennant [1] konstruuje pewną (nieklasyczną) logikę klas Fregego (FCT), która charakteryzuje podstawowe pojęcia teorio-mnogościowe, ale nie pozwala na dowodzenie twierdzeń o istnieniu obiektów, które pod nie podpadają. Innym rozwiązaniem jest oparta na logice klasycznej wirtualna teoria klas (VTC) zaproponowana przez Quine'a [2]. W obu przypadkach kluczowe jest stosowanie abstraktów jako reprezentantów klas, a środki współczesnej teorii dowodu dostarczają właściwych narzędzi do precyzyjnego ujęcia zarówno FCT jak i VTC.

Teoria dowodu, zaproponowana jako autonomiczny dział matematyki przez Davida Hilberta, rozwinęła specyficzne narzędzia analizy dowodu dzięki Gerhardowi Gentzenowi w latach 30-tych XX w. Zwłaszcza rachunki sekwentowe, dzięki specyficznej formie reguł, okazały się nieocenionym środkiem w badaniach teorio-dowodowych. Ich zastosowanie doprowadziło do wielu ważnych wyników o specyficznym charakterze, jak twierdzenia o eliminacji cięcia, normalizacji dowodu, czy własności podformułu. Umożliwiają one dla wielu teorii

również konstruktywne dowody wyników teorio-modelowych, jak niesprzeczność, rozstrzygalność czy interpolacja. Pośrednio wyniki związane z rachunkami sekwentowymi przyczyniły się też do rozwinięcia teoretycznych podstaw dla automatyzacji dowodzenia i konstrukcji systemów rezolucji czy tablicowych, które są tam powszechnie wykorzystywane.

Niestety badania nad regułowym ujęciem operatorów nazwotwórczych, takich jak operator abstrakcji, nie były wcześniej podejmowane. Z tego powodu trudno uzyskać rachunki sekwentów, które charakteryzowałyby w zadowalający sposób systemy teorii mnogości lub logiki klas, takie jak VTC. Główny nurt badań teorio-dowodowych nad teorią mnogości (ordinal proof theory) nie wymagał takich modyfikacji rachunku sekwentów. Również w automatycznym dowodzeniu twierdzeń używa się systemów z dodanymi aksjomatami teorii mnogości (np. w środowisku Metamath, HOL, Isabelle czy Mizar).

Zaprezentujemy inne podejście do klas w ramach strukturalnej teorii dowodu, w postaci czysto regułowego ujęcia VTC jako rachunku sekwentów, dla którego można udowodnić twierdzenie o eliminacji cięcia i pewne jego konsekwencje (np. niesprzeczność VTC). System ten można modularnie poszerzać za pomocą reguł charakteryzujących rozmaite operacje i predykaty teorio-mnogościowe. Pokażemy też, że można na jego podstawie uzyskać istotne fragmenty takich teorii jak ZF w sposób czysto regułowy, bez dodawania aksjomatów. W przypadku takich wzmocnień wychodzimy już poza logikę klas, gdyż reguły te pozwalają na dowody egzystencjalne (np. dowody aksjomatów istnienia pary, sumy, zbioru potęgowego, nieskończoności).

Badania zostały zrealizowane w ramach projektu ExtenDD finansowanego przez European Research Council (ERC ADG 101054714).

MSC (2020): 03B35, 03E30, 03F05, 03F07

Literatura

- [1] N. Tennant, *Frege's Class Theory and the Logic of Sets*, w: Peter Schroeder-Heister on Proof-Theoretic Semantics. Springer, 2024, 85–134.
- [2] W. Van O. Quine, *Set Theory and its Logic*, The Belknap Press, Harvard, 1963.