

Niestandardowe funkcje wykładnicze na skalach czasowych i ich zastosowania

Jan Leszek Cieśliński

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: j.cieslinskia@uwb.edu.pl

Skalą czasową nazywamy dziedzinę (zbiór domknięty), na której określamy funkcje oraz ich pochodne czy całki, a także układy dynamiczne. Przypadkami skrajnymi są równania różniczkowe (przypadek ciągły) oraz różnicowe (przypadek czysto dyskretny). Rozważanie dowolnej skali czasowej pozwala więc na jednolite traktowanie przypadku ciągłego i dyskretnego, q -analogów oraz wszystkich przypadków pośrednich, w szczególności fraktalnych.

Mówiąc o funkcji wykładniczej na skali czasowej zwykle ma się na myśli funkcję wykładniczą delta, rzadziej stosowana jest funkcja wykładnicza nabla (obie te funkcje mają też swoje dobrze znane q -analogi). Niestety, te standardowe funkcje wykładnicze na ogół nie odwzorowują podzbiorów osi urojonej w okrąg, co przekłada się na niezbyt dobre własności powiązanych z nimi funkcji trygonometrycznych na skalach czasowych. Zazwyczaj nie są one ani okresowe, ani nawet ograniczone.

W referacie zaprezentowane są inne typy funkcji wykładniczych, prowadzących do funkcji trygonometrycznych o znacznie lepszych własnościach (np. suma kwadratów sinusa i cosinusa wynosi jeden), związane z symetrycznymi przybliżeniami Padégo [3]. Najprostszym, ale zarazem najważniejszym, jest przypadek przypominający transformatę Cayley'a [2, 4].

Ważną motywacją tego podejścia jest powiązanie układów dynamicznych na dyskretnych skalach czasowych z metodami numerycznymi. W tym kontekście równania pierwszego rzędu typu delta i nabla odpowiadają metodom Eulera (otwartej i zamkniętej), a inne schematy numeryczne prowadzą do innych równań na skalach czasowych, których rozwiązaniami są inne typy funkcji wykładniczych.

W przypadku ciągłym ściśle rozwiązania różnych równań dość często zbudowane są z funkcji wykładniczych czy trygonometrycznych. W referacie podane zostaną analogiczne przykłady ścisłych rozwiązań dla równań na skalach czasowych, poczynając od równań liniowych o stałych współczynnikach, jak oscylator harmoniczny.

Ciekawym przypadkiem są całkowalne równania różniczkowe cząstkowe, gdzie rozwiązania solitonowe wyrażają się poprzez funkcje wykładnicze. Moż-

na by się spodziewać, że analogi tych równań na skalach czasowych także będą posiadać tego typu rozwiązania. Potwierdza to przykład równania sinusa-Gordona, związanego z powierzchniami pseudosferycznymi [1, 5]. Co ciekawe, w zagadnieniu tym przydaje się zarówno funkcja wykładnicza delta (na etapie konstrukcji tzw. pary Laxa), jak i funkcja wykładnicza Cayley'a (przez którą wyraża się rozwiązanie solitonowe).

MSC (2020): 33B10, 34N05, 35R07

Literatura

- [1] J.L. Cieśliński, *Pseudospherical surfaces on time scales: A geometric definition and the spectral approach*, J. Phys. A: Math. Theor., 2007, 40, 12525–12538.
- [2] J.L. Cieśliński, *Improved q -exponential and q -trigonometric functions*, Appl. Math. Lett., 2011, 24, 2110–2114.
- [3] J.L. Cieśliński, *Some implications of a new approach to exponential functions on time scales*, Discrete Contin. Dyn. Syst. (Suppl.), 2011, 302–311
- [4] J.L. Cieśliński, *New definitions of exponential, hyperbolic and trigonometric functions on time scales*, J. Math. Anal. Appl., 2012, 388, 8–22.
- [5] J.L. Cieśliński, T. Nikiciuk, K. Waśkiewicz, *The sine-Gordon equation on time scales*, J. Math. Anal. Appl., 2015, 423, 1219–1230.