

Grupy relatywnie hiperboliczne: skończone podgrupy nieparaboliczne, problem rzędu i problem równań wykładniczych

Oleg Bogopolski

Uniwersytet Szczeciński

e-mail: oleg.bogopolskiy@usz.edu.pl

Grupy relatywnie hiperboliczne zostały wprowadzone przez Gromova [4] jako uogólnienie grup hiperbolicznych. Przykładami takich grup są grupy podstawowe niezwartych rozmaitości Riemanna o skończonej objętości i o ujemnej krzywiznie ściśle ograniczonej, geometrycznie skończone grupy Kleina, grupy hiperboliczne oraz grupy małych skreśleń nad produktami wolnymi; szczegóły można znaleźć w pracy Osina [5].

W moim wystąpieniu krótko przedstawię to zagadnienie, a następnie omówię nasze najnowsze wyniki z [1, 2].

Niech G będzie grupą relatywnie hiperboliczną względem rodziny podgrup $\{H_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Zakładamy, że G jest zadana przez skończoną prezentację relatywną $\mathcal{P}$ względem tej rodziny.

(1) Przypomnijmy, że podgrupa F grupy G nazywa się *nieparaboliczna*, jeśli nie istnieje $\lambda \in \Lambda$ taka, że F jest sprzężona z podgrupą grupy H_λ . W pracy [2] podajemy górne ograniczenie rzędów skończonych nieparabolicznych podgrup grupy G w zależności od pewnych fundamentalnych stałych związanych z $\mathcal{P}$. To górne ograniczenie jest obliczalne, jeśli G jest skończenie generowana i problem słów w każdej podgrupie H_λ , $\lambda \in \Lambda$, jest rozstrzygalny. Wynik ten uogólnia rezultat Bogopolskiego i Gerasimova [3] dotyczący skończonych podgrup grup hiperbolicznych.

(2) Przypomnijmy, że *problem rzędu dla elementów* w grupie H polega na obliczeniu rzędu danego elementu grupy H . Warto zauważyć, że jeśli problem ten jest rozstrzygalny w H , to również problem słów w H jest rozstrzygalny. Odwrotne stwierdzenie nie zachodzi dla pewnych grup skończenie prezentowanych. Jako wniosek z punktu (1) przedstawiamy konkretny algorytm rozwiązujący problem rzędu w G , zakładając, że Λ jest skończona i problem rzędu jest rozwiązywalny w każdej H_λ , $\lambda \in \Lambda$.

(3) Niech $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ będzie przeliczalnym nieskończonym zbiorem zmiennych. *Równanie wykładnicze* nad grupą H to równanie postaci

$$a_1 g_1^{x_{t_1}} a_2 g_2^{x_{t_2}} \cdots a_n g_n^{x_{t_n}} = 1,$$

gdzie $a_1, g_1, \dots, a_n, g_n \in H$ oraz $x_{t_1}, \dots, x_{t_n}$ są zmiennymi ze zbioru X (przyjmującymi wartości w $\mathbb{Z}$). Dopuszczamy, by niektóre zmienne się powtarzały. Jeśli wszystkie zmienne w równaniu są różne, mówimy, że równanie jest *rodzaju 1*.

W [1] podajemy algorytm rozwiązujący równania wykładnicze rodzaju 1 w relatywnie hiperbolicznych grupach G , zakładając, że G jest skończenie generowana i w każdej H_λ dostępne są odpowiednie algorytmy. Ponadto przedstawiamy przykład skończenie generowanej relatywnie hiperbolicznej grupy G , dla której istnieją algorytmy rozwiązujące równania wykładnicze w każdej H_λ , ale nie istnieje taki algorytm dla G .

MSC (2020): 20F65, 20F67, 20F10, 20F70

Literatura

- [1] A. Bier, O. Bogopolski, *Exponential equations in acylindrically hyperbolic groups*, 2021, arXiv:2106.11385v1
- [2] O. Bogopolski, *Finite non-parabolic subgroups of relatively hyperbolic groups*, J. Algebra, 2025, 677, 118–138.
- [3] O.V. Bogopolskii, V.N. Gerasimov, *Finite subgroups of hyperbolic groups*, Algebra Logic, 1995, 34, 343–345.
- [4] M. Gromov, *Hyperbolic groups*, in Essays in group theory, Springer, New York, 1987, 75–263.
- [5] D. Osin, *Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems*, Memoirs Amer. Math. Soc., 2006, 179(843).