

Zastosowanie algebr Clifforda i grup Spin do układów całkownych

Jan Leszek Cieśliński

Uniwersytet w Białymstoku

e-mail: j.cieslinska@uwb.edu.pl

Omówiona zostanie szeroka klasa problemów liniowych (par Laxa) o wartościach w algebrach Clifforda, prowadzących (poprzez odpowiednie uogólnienie wzoru Symy) do interesujących klas wielowymiarowych podrozmaitości, związanych z układami całkownych nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych (będących równaniami Gaussa-Codazzi-Ricci dla tych podrozmaitości).

Impulsem do rozwoju tej tematyki (inspirującym także dla kilku innych grup badawczych) było znalezienie pary Laxa związanej z powierzchniami izotermicznymi [4], najpierw wykorzystując grupy $SO(4,1)$ czy $SP(2,2)$, a następnie formułując to w bardziej elegancki sposób przy użyciu algebry Clifforda i grupy Spin $(4,1)$. Zastosowanie formuły Symy nie prowadzi bezpośrednio do uzyskania powierzchni izotermicznych. Zamiast tego otrzymuje się podrozmaitości o zerowej krzywiznie zanurzone w przestrzeni 6-wymiarowej. Dopiero rzutowanie na odpowiednie podprzestrzenie 3-wymiarowe daje parę powierzchni izotermicznych (są to powierzchnie dualne, znane też jako transformaty Christoffela). W ten sposób klasyczna teoria powierzchni izotermicznych, stworzona przez Bianchi'ego i Darboux, została sformułowana w języku problemów spektralnych nowoczesnej teorii solitonów.

Początkowo postać macierzowa była niezbędna przy konstrukcji transformacji Darboux-Bäcklunda (generującej nowe powierzchnie i ściśle rozwiązania równań nieliniowych). Dopiero praca [1] wskazała kierunek, w którym należy szukać uogólnienia transformacji Darboux nie wymagającego reprezentacji macierzowej.

Naturalne jest rozważenie różnych innych algebr Clifforda i grup Spin, a także różnych form zależności od parametru spektralnego. Na przykład dla grupy Spin(3) otrzymujemy klasyczną teorię powierzchni pseudosferycznych, a grupa Spin $(2n)$ prowadzi do n -wymiarowych podrozmaitości o stałej krzywiznie sekcijnej zanurzonych w R^{2n-1} [2].

Ciekawym, ale stosunkowo trudnym problemem jest konstrukcja transformacji Darboux-Bäcklunda w poszczególnych przypadkach [3, 5]. Grupy redukcji (grupy pętlowe) macierzowych par Laxa mogą zostać wyrażone w języku

inwolucji odpowiednich algebr Clifforda. Wartości własne parametryzujące ścisłe rozwiązania (solitony), zazwyczaj będące zerami pewnych wyznaczników, okazują się być zerami odpowiednich norm spinorowych.

W referacie zostaną także zwięźle przedstawione najnowsze wyniki związane z transformacją Darboux dla par Laxa w algebrach Clifforda, a także problemy związane z całkowalną dyskretyzacją tych układów.

MSC (2020): 15A67, 37K25, 37K35

Literatura

- [1] W. Biernacki, J.L. Cieśliński, *A compact form of the Darboux-Bäcklund transformation for some spectral problems in Clifford algebras*, Phys. Lett. A, 2001, 288, 167–172.
- [2] J.L. Cieśliński, *Geometry of submanifolds derived from Spin-valued spectral problems*, Theor. Math. Phys., 2003, 137, 1394–1403.
- [3] J.L. Cieśliński, *Darboux-Bäcklund Transformations for Spin-Valued Linear Problems*, in: N.B. Paranjape et al. (eds.), *Quantum Theory and Symmetries*, 37–46, CRM Series in Mathematical Physics, Springer, Cham, 2021.
- [4] J.L. Cieśliński, P. Goldstein, A. Sym, *Isothermic surfaces in E^3 as soliton surfaces*, Phys. Lett. A, 1995, 205, 37–43.
- [5] J.L. Cieśliński, Z. Hasiewicz, *Iterated Darboux Transformation for Isothermic Surfaces in Terms of Clifford Numbers*, Symmetry, 2021, 13, 148.