

Płaskie wyjścia nieliniowych układów sterowania z symetriami

Witold Respondek

Politechnika Łódzka

e-mail: witold.respondek.1@p.lodz.pl

Nieliniowy układ sterowania

$$\dot{x} = F(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U,$$

gdzie X i U są otwartymi podzbiorami, odpowiednio, $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}^m$ (ogólniej, n - i m -wymiarową rozmaitością) nazywamy *płaskim* (*flat*), zob. [1], jeżeli lokalnie istnieje m funkcji $h_i = h_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(r)})$, $1 \leq i \leq m$, liczba całkowita $s \geq 0$ oraz gładkie odwzorowania γ i δ takie, że

$$x = \gamma(h, \dot{h}, \dots, h^{(s-1)}) \quad \text{oraz} \quad u = \delta(h, \dot{h}, \dots, h^{(s)})$$

dla każdego gładkiego sterowania $u(t)$ i wzdłuż odpowiadającej mu trajektorii $x(t)$. Odwzorowanie $h = (h_1, \dots, h_m)$ nazywamy *płaskim wyjściem*.

W referacie będziemy analizować następujące pytanie postawione przez Rouchon et al [3, 4]: jeżeli płaski układ sterowania dopuszcza grupę symetrii, to czy również posiada płaskie wyjścia zachowywane przez tę grupę?

Będziemy zajmować się układami liniowymi względem sterowania, tzn. postaci

$$\Delta: \quad \dot{x} = \sum_{i=1}^m u_i g_i(x).$$

Oznaczmy przez $\mathcal{G} = \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ dystrybucję rozpiętą przez pola wektorowe g_i . Rozważmy działanie $\Phi: \Gamma \times X \rightarrow X$ grupy Liego Γ na rozmaitości X i dla każdego $\gamma \in \Gamma$ oznaczmy przez $\Phi_\gamma: X \rightarrow X$ dyfeomorfizm $\Phi_\gamma(\cdot) = \Phi(\gamma, \cdot)$. Powiemy, że Φ definiuje grupę symetrii układu Δ lub, że Γ jest grupą symetrii układu Δ , jeżeli dla każdego $\gamma \in \Gamma$ dyfeomorfizm $\Phi_\gamma \in \Gamma$ jest symetrią dystrybucji $\mathcal{G}$, tzn.

$$(\Phi_\gamma)_* \mathcal{G} = \mathcal{G}.$$

Naturalne jest następujące pytanie, postawione przez Rouchon et al [3, 4]. Czy płaski układ Δ , dla którego Γ jest grupą symetrii poprzez działanie Φ , posiada płaskie wyjście $h = (h_1, \dots, h_m)$ zgodne z działaniem Γ ? Ta ostatnia własność

oznacza istnienie działania $\rho : \Gamma \times Y \rightarrow Y$ grupy Γ na przestrzeni $Y = \mathbb{R}^m$ wartości odwzorowania $h = (h_1(x), \dots, h_m(x))$ takiego, że

$$\rho_\gamma(h) = h(\Phi_\gamma).$$

Omówimy rozwiązanie problemu dla 3-wymiarowych układów z dwoma sterowaniami zaproponowane w [2]. Podamy pełną charakteryzację istnienia Γ -zgodnych płaskich wyjść w terminach fundamentalnych pól wektorowych działania grupy. Bazując na tej charakteryzacji podamy przykłady Γ -zgodnych wyjść dla płaskich układów z 3 stanami i 2 sterowaniami i, co najważniejsze, odpowiemy na pytanie Rouchon et al [3, 4].

MSC (2020): 93B27, 93B17, 93B18, 93C10, 57S15, 57S17

Literatura

- [1] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin, P. Rouchon, *A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems*, IEEE Trans. Automat. Control, 1999, 61, 1327–1361.
- [2] S. Li, W. Respondek, *Do flat systems admit a flat output compatible with a symmetry group action?*, preprint, 2025.
- [3] P. Martin, R.M. Murray, P. Rouchon, *Flat systems, equivalence and trajectory generation*, CDS Technical Report, Caltech 2003.
- [4] P. Rouchon, *Motion planning and tracking for differentially flat systems*, CIRM, 2012, https://cas.minesparis.psl.eu/~rouchon/Seminars/CIRM_nov_2012.pdf