

Kombinatoryka w wolnej probablistyce

Wojciech Młotkowski

Uniwersytet Wrocławski

e-mail: wojciech.mlotkowski@math.uni.wroc.pl

Wolna probablistyka została zapoczątkowana pracą Voiculescu z 1985 roku i jest niekomutatywną wersją rachunku prawdopodobieństwa. Nie mamy tu zbioru Ω tylko zespoloną nieprzemianną $*$ -algebrę $\mathcal{A}$ zmiennych losowych, wraz z ustalonym funkcjonałem $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, który pełni rolę wartości oczekiwanej. Wolna niezależność jest związana z iloczynem wolnym algebr i prowadzi do operacji splotu wolnego miar probablistycznych na $\mathbb{R}$. Splot ten można opisać kombinatorycznie przy pomocy wolnych kumulant.

Dokładniej, rodzinę π niepustych, parami rozłącznych podzbiorów zbioru X nazywamy *partycją zbioru X* jeśli $\bigcup \pi = X$. Jeśli dodatkowo X jest liniowo uporządkowany to partycję π nazywamy *nieprzecinającą się* jeśli zachodzi implikacja:

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4, \quad x_1, x_3 \in U \in \pi, \quad x_2, x_4 \in V \in \pi \implies U = V.$$

Jeśli $|X| = n$ to liczba nieprzecinających się partycji X jest równa liczbie Catalana $\frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n}$.

Niech μ będzie miarą probablistyczną na $\mathbb{R}$ o nośniku zwartym. Definiujemy *momenty* μ :

$$s_n(\mu) := \int_{\mathbb{R}} x^n d\mu(x).$$

Następnie definiujemy dwa ciągi: *klasyczne kumulanty* $\kappa_n^c(\mu)$, oraz *wolne kumulanty* $\kappa_n^f(\mu)$ miary μ , poprzez następujące relacje:

$$s_n(\mu) = \sum_{\pi \in P(n)} \prod_{V \in \pi} \kappa_n^c(\mu), \quad s_n(\mu) = \sum_{\pi \in NC(n)} \prod_{V \in \pi} \kappa_n^f(\mu),$$

gdzie $P(n)$ (odpowiednio: $NC(n)$) oznacza rodzinę wszystkich partycji (odpowiednio: wszystkich partycji nieprzecinających się) zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wówczas jeśli μ, ν są miarami probablistycznymi na $\mathbb{R}$ o nośnikach zwartych, to ich splot klasyczny $\mu * \nu$ i splot wolny $\mu \boxplus \nu$ jest jedyną miarą, która spełnia

$$\kappa_n^c(\mu * \nu) = \kappa_n^c(\mu) + \kappa_n^c(\nu), \quad \kappa_n^f(\mu \boxplus \nu) = \kappa_n^f(\mu) + \kappa_n^f(\nu)$$

dla $n = 1, 2, \dots$, odpowiednio.

W swoim referacie chcę zaprezentować kombinatoryczne aspekty wolnej probabilistyki. Bardziej zainteresowanym polecam książkę [2]. Od kilku lat jest też rozwijana skończona wersja wolnej probabilistyki, szczegóły można znaleźć w pracy [1].

MSC (2020): 46L54, 60C05

Literatura

- [1] A.W. Marcus, D.A. Spielman, N. Srivastava, *Finite free convolutions of polynomials*, Probab. Theory Related Fields, 2022, 182, 807–848.
- [2] A. Nica, R. Speicher, *Lectures on the combinatorics of free probability*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 335 Cambridge University Press, 2006.
- [3] D. Voiculescu, *Symmetries of some reduced free product C^* -algebras*, Operator Algebras and their Connections with Topology and Ergodic Theory, Busteni, 1983, 556–588, Lecture Notes in Math., 1132, Springer-Verlag, Berlin, 1985.